Abitur 2009	Aufgabe V	Analytische Geometrie

1. In einem kartesischen Koordinatensystem mit Ursprung O sind die Punkte $A\left(-3\,|\,4\,|\,0\right)$ und $C\left(-2\,|\,1\,|\,2\right)$.

   a) Die Punkte 0, A und C legen die Ebene E fest. Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Normalenform.

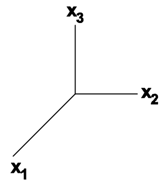
   $$\left[\text{Zur Kontolle}: 8x_1+6x_2+5x_3 = 0\right]$$

   b) Z sei der Mittelpunkt der Strecke [AC]. Durch Spiegelung des Ursprungs 0 an Z entsteht der Punkt B. Berechnen Sie die Koordinaten von B.

   $$\left[\text{Ergebnis}: B\left(-5\,|\,5\,|\,2\right)\right]$$

   c) Berechnen Sie den Innenwinkel φ des Vierecks OABC bei O und begründen Sie, dass dieses Viereck ein Parallelogramm ist.

   Zeichnen Sie das Parallelogramm in ein Koordinatensystem ein.

   (vgl. Skizze; Platzbedarf im Hinblick auf das Folgende : $-1 \leq x_3 \leq 11$)

   d) Stellen Sie eine Gleichung der Geraden $g = AB$ auf. Welche besondere Lage im Koordi natensystem hat g ?

   Das Lot vom Punkt C auf die Gerade g schneidet g im Punkt F.

   Berechnen Sie die Koordinaten von F. Zeichnen Sie das Lot in das Koordinatensystem ausTeilaufgabe l.c) ein.

   $$\left[\text{Teilergebnis}: F\left(-1{,}2\,|\,1{,}6\,|\,0\right)\right]$$

   e) Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Parallelogramms OABC $5\sqrt{5}$ beträgt.

---

2. Das Parallelogramm OABC aus Aufgabe 1 sei nun die Grundfläche einer vierseitigen Pyramide, deren Spitze S auf der positiven x_3-Achse liegt.

   a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes S so, dass die Pyramide OABCS den Rauminhalt 50 besitzt. Zeichnen Sie die Pyramide in dasKoordinatensystem aus Teilaufgabe l.c) ein.

   b) Die Pyramide rotiert nun um ihre Kante OS. Der Eckpunkt B bewegt sich dabei auf einem Kreis. Geben Sie die Koordinaten des Mittelpunkts M dieses Kreises an und berechnen Sie seinen Radius r.

c) Begründen Sie, dass der Punkt C im Inneren des in Teilaufgabe 2.b) beschriebenen Rotationskörpers liegt.

Lösung

==

1. Gegeben : $O\left(0\,|\,0\,|\,0\right)$, $A\left(-3\,|\,4\,|\,0\right)$ und $C\left(-2\,|\,1\,|\,2\right)$

a) $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\6\\5\end{pmatrix}$ und damit $E:\begin{pmatrix}8\\6\\5\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{x} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 8x_1+6x_2+5x_3 = 0$

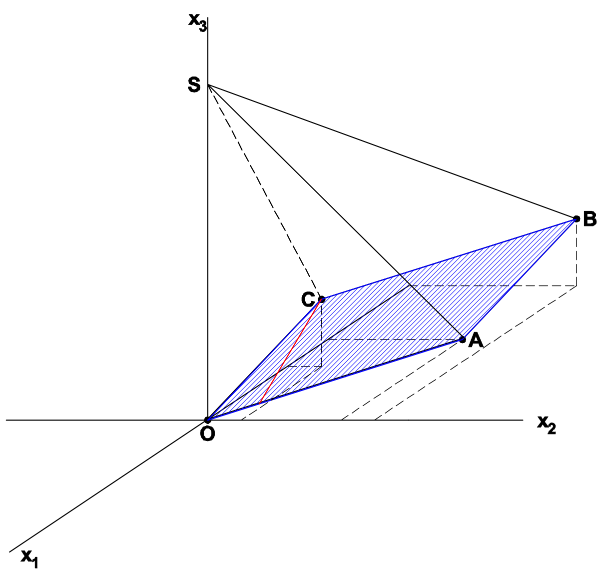
b) $\overrightarrow{z} = \frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right) = \begin{pmatrix}-2,5\\2,5\\1\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{z} = \frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{o}+\overrightarrow{b}\right) \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{b} = 2\cdot\overrightarrow{z} = \begin{pmatrix}-5\\5\\2\end{pmatrix}$

$B\left(-5\,|\,5\,|\,2\right)$ ist also der gesuchte Punkt.

c) $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$

ergibt $\cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}}{\overline{OA}\cdot\overline{OC}} = \dfrac{10}{5\cdot 3} = \dfrac{2}{3} \quad\Rightarrow\quad \varphi\approx 48{,}2^\circ$

Ferner ist $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix} = \overrightarrow{CB}$ und $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$ und OABC mithin ein Parallelogramm.



d) Gerade OA . $\vec{x} = \delta \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

OA verläuft in der x_1x_2-Ebene und geht durch den Ursprung.

Ansatz für die Lotebene L zu AB durch C : $-3x_1 + 4x_2 + n_4 = 0$

C eingesetzt : $-3\cdot(-2) + 4\cdot 1 + n_4 = 0 \Rightarrow n_4 = -10$

Schnitt mit L : $-3\cdot(-3\delta) + 4\cdot 4\delta - 10 = 0 \Rightarrow \delta = 0{,}4$

Ortsvektor des Lotfußpunkts : $\vec{f} = 0{,}4 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}4 \\ 1{,}6 \\ 0 \end{pmatrix}$

e) $\overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}6 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{CF} = \sqrt{0{,}8^2 + 0{,}6^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$\overline{OA} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

$\mathfrak{A}_{OABD} = 5\sqrt{5}$

---

2. a) $\mathfrak{V} = \frac{1}{3} G \cdot h \Rightarrow h = \frac{3\mathfrak{V}}{G} = \frac{50}{5\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$

Der Abstand von $S(0 \mid 0 \mid s_3)$ zur Ebene E ist also gleich $\frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$. Damit muss gelten

$$\left| \frac{8\cdot 0 + 6\cdot 0 + 5\cdot s_3}{\sqrt{125}} \right| = \frac{10}{\sqrt{5}} \Rightarrow s_3 = 10$$

b) Es ist $M(0 \mid 0 \mid 2)$ und $r = \overline{MB} = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$.

c) Est ist $\overline{MC} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5} < 5\sqrt{2}$.

Da B und C die gleiche x_3-Koordinate haben liegt C sogar im Kreis um M mit Radius r.
