

Gegeben ist die Funktion  $f : x \rightarrow x \cdot e^{2-x}$  mit dem Definitionsbereich  $D_f = \mathbb{R}$ . Ihr Graph wird mit  $G_f$  bezeichnet.

1. a) geben Sie die Nullstelle von  $f$  an und untersuchen Sie das Verhalten von  $f$  für  $x \rightarrow -\infty$  und  $x \rightarrow \infty$ .
- b) Bestimmen Sie Art und Lage des Extrempunkts von  $G_f$  und ermitteln Sie die Gleichung der Tangente  $t$  an  $G_f$  im Punkt  $P(0 | f(0))$ .

$$\left[ \text{Zur Kontrolle : } f'(x) = (1-x) \cdot e^{2-x} \right]$$

- c) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von  $G_f$ . Geben Sie die Koordinaten des Wendepunkts von  $G_f$  an.
- d) Berechnen Sie  $f(0,5)$  und  $f(5)$ . Zeichnen Sie die Tangente  $t$  und den Graphen  $G_f$  unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem ein.

(Platzbedarf im Hinblick auf das Folgende :  $-7 \leq y \leq 9$ )

2. a) Ermitteln Sie durch Betrachtung einer jeweils geeigneten Dreiecks oder Trapezfläche grobe Näherungswerte für  $\int_0^1 f(x) dx$  und  $\int_1^5 f(x) dx$ .

- b) Betrachtet wird die Integralfunktion :  $I : x \rightarrow \int_0^x f(t) dt$  für  $x \in \mathbb{R}$ :

Bestimmen Sie ohne Verwendung einer Integralfreien Darstellung der Funktion  $I$  Art und Lage des Extrempunktes des Graphen von  $I$ .

Skizzieren Sie unter Einbeziehung der bisherigen Ergebnisse, insbesondere auch der Näherungswerte aus Aufgabe 2.a) den Graphen von  $I$  in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe 1.d).

3. Gegeben ist nun zusätzlich die Schar der Geraden  $g_a$  mit den Gleichungen  $y = ax$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , und Definitionsbereich  $D_a = \mathbb{R}$ .

- a) Jede Gerade  $g_a$  hat mit  $G_f$  den Ursprung gemeinsam (kein Nachweis erforderlich).

Untersuchen Sie rechnerisch, für welche Werte des Parameters  $a$  es einen zweiten Punkt gibt, die die Gerade  $g_a$  mit  $G_f$  gemeinsam hat.

Geben Sie die  $x$ -Koordinate  $x_S$  dieses Punktes in Abhängigkeit von  $a$  an.

[Zur Kontrolle :  $x_S = 2 - \ln a$ ]

b)  $F : x \rightarrow (-x - 1) \cdot e^{2-x}$  mit  $x \in \mathbb{R}$  ist eine Stammfunktion von  $f$  (Nachweis nicht erforderlich).

Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die  $G_f$  mit der Geraden  $g_a$  für  $a = 1$  einschließt.

c)  $G_f$  und die  $x$ -Achse schließen im I. Quadranten ein sich ins Unendliche erstreckendes Flächenstück ein, das den endlichen Flächeninhalt  $e^2$  besitzt (Nachweis nicht erforderlich).

Für ein, bestimmtes  $a_0$  teilt die Gerade  $g_{a_0}$  dieses Flächenstück in zwei inhaltsgleiche Teilstücke.

Geben Sie einen Ansatz zur Bestimmung von  $a_0$  an.

---

## Lösung

---

1. a)  $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^{2-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{x-2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^2 \cdot x}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^{2-x} = -\infty$$

$$\text{b) } f'(x) = 1 \cdot e^{2-x} + x \cdot e^{2-x} \cdot (-1) = (1-x) \cdot e^{2-x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f''(x) = -1 \cdot e^{2-x} + (1-x) \cdot e^{2-x} \cdot (-1) = (x-2) \cdot e^{2-x}$$

$$f''(1) = (1-2) \cdot e^{2-1} = -e < 0$$

Also ist  $E(1|e)$  ein Hochpunkt des Graphen.

$f'(0) = e^2$  und damit ist  $y = e^2 \cdot x$  die Gleichung der Tangente im Punkt P.

$$\text{c) } f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Krümmungsverhalten von f

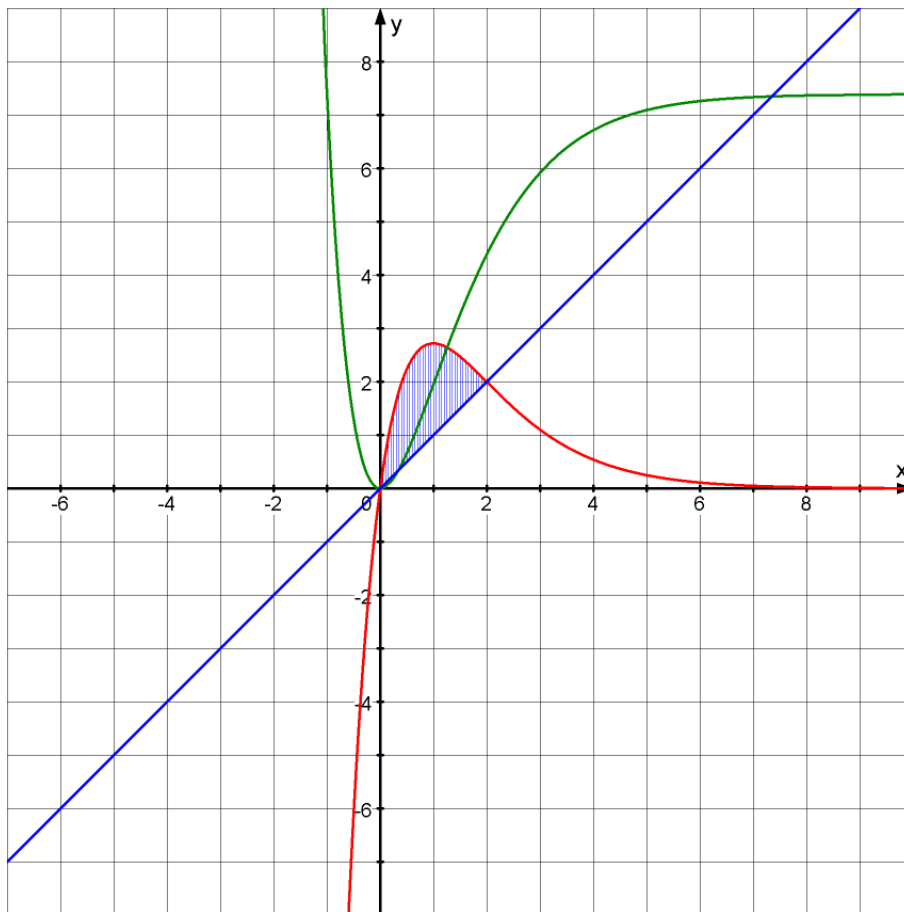
	$-\infty < x < 2$	$2 < x < \infty$
$f''(x)$	-	+
	Rechtskrümmung	Rechtskrümmung

Mithin ist  $W(2|2)$  der einzige Wendepunkt des Graphen von f.

d) Der Ursprung ist TP des Graphen von I.

Begründung :  $f(0) = 0$  mit VZW von - nach + und  $I(0) = 0$

$$f(-0,5) = -0,5 \cdot e^{2,5} \approx -6,1 \text{ und } f(5) = 5 \cdot e^{-3} \approx 0,25$$



$$2. a) \int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot e = \frac{e}{2} \approx 1,4 \text{ und } \int_1^5 f(x) dx \approx \frac{1}{2} \cdot (e + \frac{5}{e^3}) \cdot 4 \approx 5,9$$

3. Gegeben :  $g_a \cdot y = ax$

$$a) ax = x \cdot e^{2-x} \Leftrightarrow x \cdot (a - e^{2-x}) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee e^{2-x} = a$$

Es gibt also zwei Schnittpunkte, wenn  $a > 0$  ist.

Der zweite Schnittpunkt hat die x-Koordinate  $2 - x = \ln a \Leftrightarrow x = 2 - \ln a$

$$b) A = \int_0^2 [f(x) - x] dx = \left[ (-x - 1) \cdot e^{2-x} - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = (-3 - 2) - (-e^2) = e^2 - 5$$

$$c) \int_0^{2-\ln a} [f(x) - ax] dx = \frac{1}{2} e^2$$