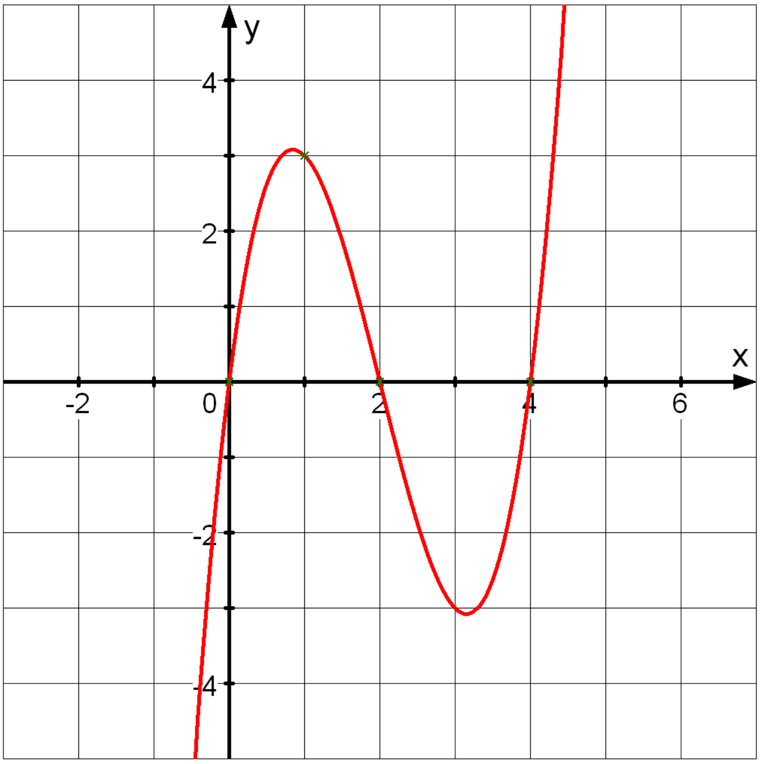
Abitur 2009	Aufgabe I	Infinitesimalrechnung

1. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$.

   Die in der Abbildung angegebenen Punkte $P(1|\,3)$, $N_1(0|\,0)$, $N_2(2|\,0)$ und $N_3(4|\,0)$ sind Punkte von G_f.



   a) Geben Sie den Funktionsterm von f in der Form $f(x) = a(x-b)(x-c)(x-d)$ an, indem Sie passende Werte für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ermitteln.

   Zeigen Sie, dass sich dieser in der Form $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ schreiben lässt.

   b) Weisen Sie nach, dass N_2 Wendepunkt von G_f ist, und eimitteln Sie die Gleichung der zugehörigen Wendetangente.

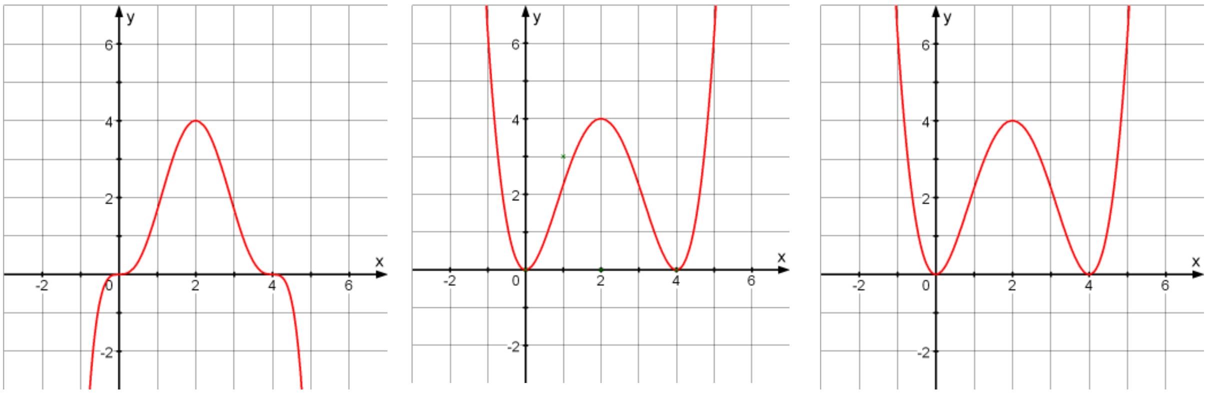
   $$\left[\text{Zur Kontrolle : Tangentengleichung } y = -4x + 8\right]$$

   c) Die Wendetangente schließt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck ein.

   Bestimmen Sie die Innenwinkel dieses Dreiecks.

Betrachtet wird nun die Integralfunktion $F: x \rightarrow \int_0^x f(t)dt$ mit $D_F = \mathbb{R}$.

d) Berechnen Sie F(4). Was folgt daraus für die beiden Flächenstücke, die der GraphG_f mit der x-Achse im 1. und im IV. Quadranten einschließt ? Begründen Sie Ihre Antwort.



e) Einer der drei abgebildeten Graphen I, II oder III stellt den Graphen von F dar. Geben Sie an, welcher dies ist, und begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie erklären, warum die beiden anderen Graphen nicht in Betracht kommen.

Bestimmen Sie nun die Summe der Inhalte dieser beiden Flächenstücke.

f) Bekanntlich ist jede Integralfunktion der Funktion f auch Stammfunktion von f.

Begründen Sie, dass jede Integralfunktion mindestens eine Nullstelle hat. Geben Sie den Term einer Stammfunktion von f an, die keine Integralfunktion von f ist.

---

2. In der Medizin wird radioaktives Jod-123 zur Untersuchung der Schilddrüse eingesetzt.

Kurze Zeit nach der Verabreichung dieser Substanz an den Patienten wird die von der Substanz ausgehende Strahlung gemessen, wodurch Rückschlüsse auf den Zustand der Schilddrüse möglich sind. Durch radioaktiven Zerfall verringert sich die Substanzmasse.

Die im Körper des Patienten noch vorhandene Masse m des verabreichten Jod-123 lässt sich durch den Term $m(t) = m_0 \cdot e^{-k \cdot t}$ mit $k > 0$ beschreiben.

Dabei gibt m_0 die zum Zeitpunkt $t = 0$ verabreichte Jodmasse an; t ist die Maßzahl der seit Verabreichung vergangenen Zeit in Stunden.

a) Nach einer Zeit von 13,2 Stunden ist nur noch die Hälfte der verabreichten Jodmasse vorhanden. Bestimmen Sie hieraus den Wert des Parameters k.

$\left[\text{Zur Kontrolle}: k \approx 0{,}0525\right]$

b) Wie viel Prozent der verabreichten Jodmasse sind vier Stunden nach Verabreichung im Körper des Patienten noch vorhanden ?

Wie lange dauert es, bis 90 % der verabreichten Jodmasse zerfallen sind?

Lösung

===

1\. a) $f(x) = a\cdot(x-0)\cdot(x-2)\cdot(x-4) = a\cdot x\cdot(x-2)\cdot(x-4)$

P(1| 3) eingesetzt ergibt $3 = a\cdot(1-2)\cdot(1-4) \quad\Leftrightarrow\quad a = 1$

Damit $f(x) = x\cdot(x-2)\cdot(x-4) = x^3-6x^2+8x$

b) $f'(x) = 3x^2-12x+8 \quad f''(x) = 6x-12 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = 2 \quad f'''(x) = 6 \neq 0$

$N_2(2|\,0)$ ist der einzige Wendepunkt des Graphen von f.

$f'(2) = -4$ ergibt die Wendetangente $y = -4\cdot(x-2) = -4x+8$

c) Winkel bei N_2: $\tan\alpha = \frac{8}{2} = 4 \quad\Rightarrow\quad \alpha \approx 76°$

Die anderen Winkel messen 90° und 14°.

d) $F(4) = \int_0^4 (x^3-6x^2+8x)dx = \left[\frac{x^4}{4}-2x^3+4x^2\right]_0^4 = 64-128+64 = 0$

$F(2) = \int_0^2 (x^3-6x^2+8x)dx = \left[\frac{x^4}{4}-2x^3+4x^2\right]_0^2 = 4-16+16 = 4$

e) Graph I : Nicht der Graph von F, da $F(x) > 0$ für $x < 0$

Graph III : Nicht der Graph von F, da F zwischen 0 und 4 nur ein relatives Maximum be-
besitzt.

f) Die untere Grenze ist Nullstelle jeder Integralfunktion $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

$F_1(x) = F(x)+1$ ist Stammfunktion, aber keine Integralfunktion, da sie keine Nullstelle besitzt.

2\. a) $\frac{1}{2}m_0 = m_0\cdot e^{-k\cdot 13{,}2} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2} = e^{-13{,}2\cdot k} \quad\Leftrightarrow\quad -13{,}2\cdot k = \ln\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad k = \frac{\ln 2}{13{,}2}$

$k \approx 0{,}525$

b) $\frac{m(4)}{m_0} = e^{-\frac{\ln 2}{13{,}2}\cdot 4} \approx 0{,}81$

Nach 4 Stunden sind noch ca. 81% des verabreichten Jods vorhanden.

$$0{,}1m_0 = m_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{13{,}2}\cdot t} \quad \Rightarrow \quad e^{-\frac{\ln 2}{13{,}2}\cdot t} = 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\ln 2}{13{,}2}\cdot t = \ln 0{,}1$$

$$\Rightarrow \quad t = -13{,}2 \cdot \frac{\ln 0{,}1}{\ln 2} \approx 44$$

Nach ca. 44 h sind 90% der radioaktiven Jods zerfallen.