Abitur 2008		Analytische Geometrie II

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A\left(1\,|\,2\,|\,0\right)$, $B\left(3\,|\,0\,|\,2\right)$ und $C\left(5\,|\,5\,|\,2\right)$ ein Dreieck in einer Ebene E fest.

Die Gerade g enthält den Punkt B und besitzt den Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

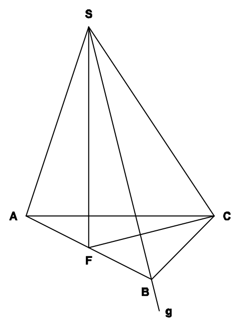
1. a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist und berechnen Sie alle Innenwinkel des Dreiecks.

b) Weisen Sie nach, dass der Punkt $F\left(2\,|\,1\,|\,1\right)$ Mittelpunkt der Strecke $\left[AB\right]$ ist und ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene G in Normalenform, bezüglich der die Punkte A und B zueinander symmetrisch sind.

$\left[\text{mögliches Ergebnis : } G : x_1 - x_2 + x_3 - 2 = 0\right]$

c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S der Geraden g mit der Ebene G.

$\left[\text{Ergebnis : } S\left(-3\,|\,3\,|\,8\right)\right]$



d) Bestätigen Sie, dass die Gerade FS senkrecht auf der Ebene E steht und begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass der Punkt F auf dem Kreise in der Ebene G mit Durchmesser $\left[SC\right]$ liegt.

---

2. a) Bei der Rotation des rechtwinkligen Dreiecks FCS um die Achse FS entsteht ein gerader Kegel K_1. Berechnen Sie das Volumen dieses Kegels.

b) Der Kegel K_1 schneidet die Kegel die Ebene G im Dreieck CSC^*.

Berechnen Sie die Koordinaten von C^* und zeichnen Sie das Dreieck CSC^* in wahrer Größe (1 LE entspricht 1 cm; sinnvolle Rundung der Längen).

c) Es sei r der Radius der größten Halbkugel mit Grundfläche in E, die dem Kegel K_1 einbeschrieben werden kann.

Beschreiben Sie einen Weg zur rechnerischen Bestimmung von r (Rechnungen nicht erforderlich).

d) Lässt man das Dreieck FCS um die Achse FC rotieren, so entsteht ein Kegel K_2.

Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass folgende Schlussfolgerung falsch ist :

Weil bei K_2 im Vergleich zu K_1 Höhe und Grundkreisradius nur vertauscht sind, müssen K_1 und K_2 das gleiche Volumen besitzen.

Lösung

===

1. a) Seiten : $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{CA} = \sqrt{29}$ und $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{CB} = \sqrt{29}$

Winkel : $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 23$ und damit $\cos\gamma = \frac{23}{29} \Rightarrow \gamma \approx 37{,}5° \Rightarrow \alpha = \beta \approx 71{,}2°$

b) $\overrightarrow{m} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{f}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$G : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\overrightarrow{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 + x_3 - 2 = 0$

$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

g in E : $(3 - 2\lambda) - \lambda + (2 + 2\lambda) - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3$

Eingesetzt ergibt sich $\overrightarrow{s} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

d) $\overrightarrow{SF} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ ergibt $\overrightarrow{SF} \cdot \overrightarrow{CF} = 0$.

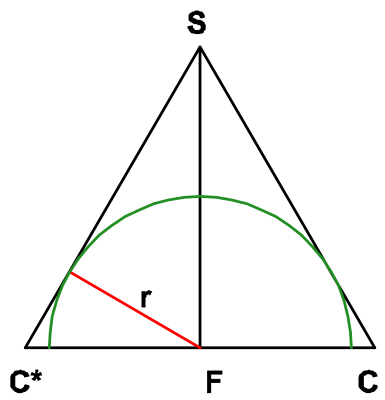
Da G SymmetrieEbene von $\left[AB\right]$ ist, steht ergibt sich $SF \perp E$.

Es ist $\measuredangle CFS = 90°$. Also liegt F auf dem Thaleskreis über $\left[CS\right]$:

---

2. a) $\overline{CF} = \sqrt{26}$ und $\overline{SF} = \sqrt{78}$ und damit $\mathfrak{V} = \frac{1}{3}\pi \cdot 26\sqrt{78}$

b) $\vec{f} = \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{c} + \vec{c'}\right) \Rightarrow \vec{c'} = 2 \cdot \vec{f} - \vec{c} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$



c) r ist der Abstand des Punktes F von der Geraden CS bzw. $C^{*}S$:

d) Das Volumen eines Kegel hängT quadratisch vom Radius und linear von der Höhe ab.

Außer im Fall $h = r$ ändert sich daher das Volumen.
