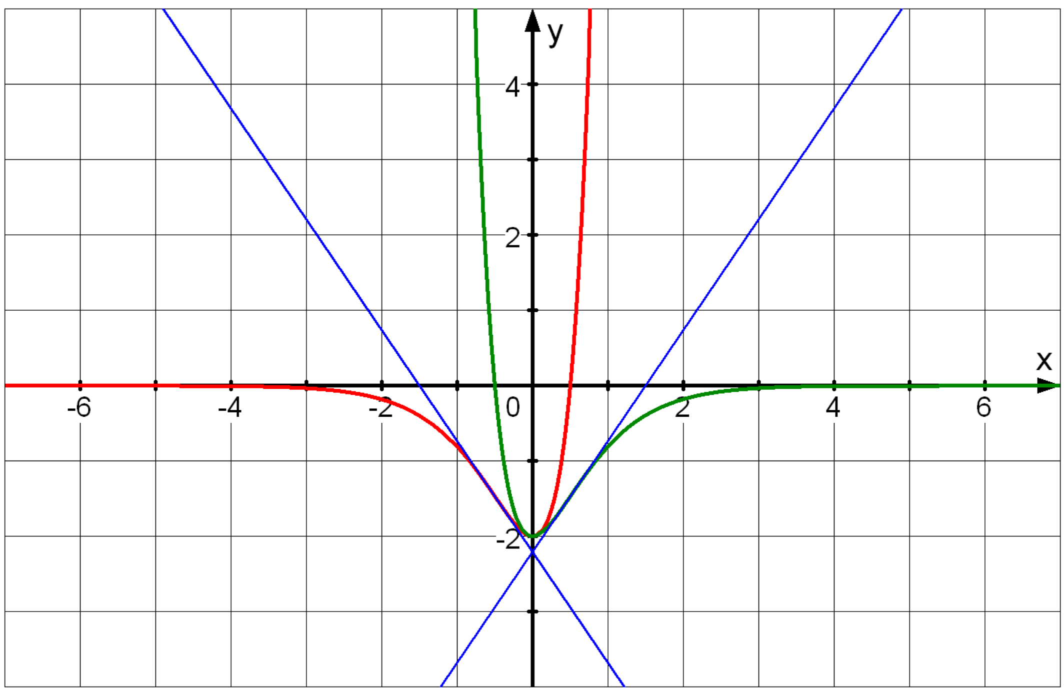
Die Abbildung zeigt den Graphen G_g der Funktion $g: x \rightarrow (4x-2)\cdot e^{2x}$ mit dem Definitionsbereich $D_g = \mathbb{R}$.



1. a) Berechnen Sie die Nullstelle von g.

G_g besitzt genau einen Tiefpunkt (Nachweis nicht erfordelrich). Berechnen Sie dessen Koordinaten.

$$\left[\text{Zur Kontrolle}: g'(x) = 8xe^{2x}\right]$$

b) Weisen Sie nach, dass G_g genau einen Wendepunkt besitzt und bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente w. Tragen Sie diese in obige Abbildung ein.

$$\left[\text{Zur Kontrolle}: w: y = -\frac{4}{e}x - \frac{6}{e}\right]$$

c) Gegeben ist die Integralfunktion $I: x \rightarrow \int_0^x g(t)dt$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Für verschiedene Werte von x wird jeweils das Vorzeichen von I(x) betrachtet.

Was kann hierüber ohne Rechnung im Bereich $0 < x \leq 0{,}5$ ausgesagt werden, was im Bereich $x > 0{,}5$?

Begründen Sie ihre Antwort, ohne eine integralfreie Darstellung von I zu verwenden.

Gegeben ist nun zusätzlich die Funktion

$h : x \to (-4x-2)\cdot e^{-2x}$

mit Definitionsbereich $D_h = \mathbb{R}$ und zugehörigem Graph G_h

2. a) Begründen Sie anhand der Funktionsterme von g und h, dass man G_h erhält, indem man G_g an der y-Achse spiegelt.

   Geben Sie auch die Gleichung der Wendetangente von G_h an.

   b) Die Funktion $G : x \to (2x-2)\cdot e^{2x}$ mit $D_G = \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von g (Nachweis nicht erforderlich.

   Die Schnittpunkte der Graphen G_g bzw. G_h mit der x-Achse werden mit N bzw. M bezeichnet.

   Berechnen Sie den Inhalt A des Flächenstücks, das von der Strecke $\left[MN\right]$ sowie den Graphen G_g und G_h eingeschlossen wird.

   $\left(\text{Hinweis : } G_g \text{ und } G_h \text{ schneiden sich nur auf der } y-\text{Achsse.}\right)$

---

3. Betrachtet wird nun die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen

   $f_a : x \to (2ax-2)\cdot e^{ax}$ mit $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

   a) Zeigen Sie, dass die Funktionen g und h Funktionen der Schar sind, indem Sie die zuge. hörigen Parameterwerte a angeben.

   Weisen Sie nach, dass alle Graphen der Schar die y-Achse im selben Punkt schneiden.

   b) Jede Funktion der Schar hat genau eine Wendestelle und zwar bei $x = -\frac{1}{a}$ (Nachweis nicht erforderlich).

   Zeigen Sie, dass alle Wendepunkte auf einer Parallelen p zur x-Achse liegen, und geben Sie die Gleichung von p an.

   c) Die Wendetangente jedes Graphen der Schar schließt mit den Koordinatenachsen ein rechtwinkliges Dreieck ein. Für bestimmte Werte von a ist dieses Dreieck gleichschenklig.

   Beschreiben Sie einen Weg, um diese Werte von a rechnerisch zu ermitteln (Rechnungen sind nicht erforderlich).

Lösung

==

1\. a) $g(x) = (4x-2)\cdot e^{2x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x-2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}$

$g'(x) = 4\cdot e^{2x} + (4x-2)\cdot e^{2x}\cdot 2 = 8x\cdot e^{2x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

$g(0) = (4\cdot 0-2)\cdot e^{2\cdot 0} = -2\cdot 1 = -2$

b) $g''(x) = 8\cdot e^{2x} + 8x\cdot e^{2x}\cdot 2 = (8+16x)\cdot e^{2x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$

Krümmungsverhalten :

	$-\infty < x < -0{,}5$	$-0{,}5 < x < \infty$
$8+16x$	$-$	$+$
e^{2x}	$+$	$+$
$g''(x)$	$-$	$+$
	RK	LK

$W\left(-\frac{1}{2}; -\frac{4}{e}\right)$ ist also der einzige Wendepunkt des Graphen von f.

$g'(-0{,}5) = -4\cdot e^{-1} = -\frac{4}{e}$

Wendetangente $w : y = -\frac{4}{e}\cdot(x+0{,}5) - \frac{4}{e} = -\frac{4}{e}x - \frac{6}{e}$

c) $I : x \to \int_0^x g(t)dt$

I ist für $0 < x \leq 0{,}5$ negativ,

da die Integration nach rechst verläuft und der Integrand für $0 < x < 0{,}5$ negativ ist.

Für $x > 0{,}5$ kommt es für ein $x_0 > 0{,}5$ zum Flächenausgleich und I wird positiv um es dann auch zu bleiben.

2\. a) $g(-x) = \left[4\cdot(-x)-2\right]\cdot e^{2\cdot(-x)} = (-4x-2)\cdot e^{-2x} = h(x)$

Also liegen der Graph von h und der Graph von g achsensymmetrisch zur y-Achse.

$w' : y = \frac{4}{e}x - \frac{6}{e}$

b) $\int_0^{0,5} g(x)dx = \Big[(2x-2)\cdot e^{2x}\Big]_0^{0,5} = (1-2)\cdot e-(0-2)\cdot 1 = 2-e$

$\mathfrak{A} = 2\cdot(ee-2) = 2e-4$

---

3. $f_a(x) = (2ax-2)\cdot e^{ax}$ mit $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

a) $g(x) = f_2 x)$ und $h(x) = f_{-2}(x)$

$f_a(0) = (0-2)\cdot e^0 = -2$

b) $f_a(-\frac{1}{a}) = \left[2a\cdot(-\frac{1}{a})-2\right]\cdot e^{a\cdot(-\frac{1}{a})} = -\frac{4}{e}$ ergibt $p: y = -\frac{4}{e}$

c) Der Betrag der Nullstelle der Wendetangente muss gleich dem Betrag des y-Abschnitts der Wendetangente sein.
