Abitur 2007		Analytische Geometrie II

In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ ist die Ebenenschar

$$E_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit} \lambda, \tau \in \mathbb{R} \text{ und } t \in \mathbb{R} \text{ gegeben.}$$

1. a) Bestimmen Sie eine Gleichung von in Normalenform. Begründen Sie, dass alle Ebenen der Schar zueinander parallel sind.

$$\left[\text{mögliches Teilergebnis } E_t: 2x_1 + x_2 - 2x_3 - t = 0\right]$$

b) Berechnen Sie den Winkel φ, unter dem jede Ebene der Schar E_t die x_1x_2-Ebene schneidet, auf eine Dezimale gerundet.

c) Die Ebene L enthält die x_2-Achse und ist Lotebene zur Ebene .

Ermitteln Sie eine Gleichung von L in Normalenform und geben Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s_t von L und E_t in Parameterform an.

2. Die Ebene E_t schneidet die x_1-Achse im Punkt A_t, die x_2-Achse-Achse im Punkt B_t und die x_3-Achse im Punkt C_t.

Diese Punkte und der Ursprung O sind für $t \neq 0$ die Ecken einer Pyramide Π_t.

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte A_t, B_t und C_t

und und zeichnen Sie in einem Koordinatensystem

(vgl. Skizze) für $t = -8$ die Pyramide Π_{-8} ein.

b) Zeigen Sie, dass die Pyramide Π_t den Oberflächeninhalt t^2besitzt, und ermitteln Sie das Volumen V_t von Π_t in Abhängigkeit von t.

c) Die Ebene $F: 2x_2 = t$ liegt parallel zu einer Seitenfläche und zerlegt Π_t in zwei Teilkörper.

Berechnen Sie das Verhältnis ihrer Volumina.

d) Zeigen Sie, dass die Kugel K mit dem Mittelpunkt $N_t\left(\frac{t}{8} \mid \frac{t}{8} \mid -\frac{t}{8}\right)$ und dem

Radius $\rho_t = \frac{|t|}{8}$ die Inkugel der Pyramide Π_t ist, also alle Begrenzungsflächen von von innen berührt.

e) Die Ecken der Pyramide Π_t liegen auf einer Kugel (Umkugel) mit dem Mittelpunkt $M\left(m_1 \,\middle|\, m_2 \,\middle|\, m_3\right)$ und dem Radius r.

Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass gilt : $m_2 = \frac{t}{2}$

Geben Sie m_2 sowie m_3 an und berechnen Sie r.

Lösung

==

1. a) Normalenvektor : $\overrightarrow{n_{E_t}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Normalenform E_t : $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x_1 + x_2 - 2x_3 - t = 0$

Alle Ebenen der Schar werden von den gleichen Vektoren aufgespannt bzw. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

ist Normalenvektor aller Scharebenen.

b) Skalarprodukt der Normalenvektoren : $\vec{n} \cdot \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2$

Beträge : $\left|\vec{n}\right| = \sqrt{4+1+4} = 3 \qquad \left|\vec{e_3}\right| = 1$

$$\text{Winkel}: \cos\varphi = \left| \frac{-2}{3\cdot 1} \right| = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 48{,}2°$$

c) Ansatz für L: $\vec{x} = \sigma \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Normalenvektor von L: $\vec{n_L} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Normalenform von L: $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x_1 + 2x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 = 0$

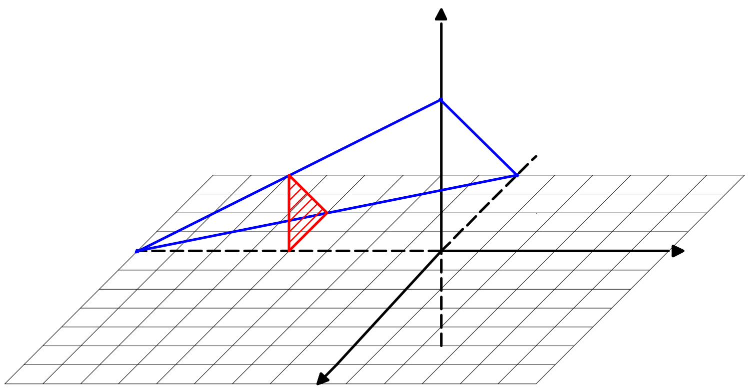
$x_1 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -x_1 = \mu$ (Parametrisierung)

In E_t: $2\mu + x_2 + 2\mu - t = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = t - 4\mu$

Schnittgerade s_t: $\vec{x} = \begin{pmatrix} \mu \\ t-4\mu \\ -\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

---

2. a) $A_t\left(\frac{t}{2} \,|\, 0 \,|\, 0\right)$, $B_t\left(0 \,|\, t \,|\, 0\right)$, $C_t\left(0 \,|\, 0 \,|\, -\frac{t}{2}\right)$



b) $\overrightarrow{A_tB_t} = \begin{pmatrix} -t/2 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{A_tC_t} = \begin{pmatrix} -t/2 \\ 0 \\ -t/2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{A_tB_t} \times \overrightarrow{A_tC_t} = \begin{pmatrix} -t/2 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -t/2 \\ 0 \\ -t/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^2/2 \\ -t^2/4 \\ t^2/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathfrak{A}_{A_tB_tC_t} = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{A_tB_t} \times \overrightarrow{A_tC_t} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{t^4}{4} + \frac{t^4}{16} + \frac{t^4}{4}} = \frac{3}{8} t^2$$

$$\mathfrak{O} = \mathfrak{A}_{OA_tB_t} + \mathfrak{A}_{OA_tC_t} + \mathfrak{A}_{OB_tC_t} + \mathfrak{A}_{A_tB_tC_t} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left| t \cdot \frac{t}{2} \right| + \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{t}{2} \cdot \frac{t}{2} \right| + \frac{1}{2} \cdot \left| t \cdot \frac{t}{2} \right| + \frac{3}{8} t^2 = t^2$$

$$\mathfrak{V}_t = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left| t \cdot \frac{t}{2} \cdot \frac{t}{2} \right| = \frac{1}{24} \cdot \left| t^3 \right|$$

c) $\dfrac{\mathfrak{V}_1}{\mathfrak{V}_2} = \dfrac{\frac{1}{8}\mathfrak{V}}{\frac{7}{8}\mathfrak{V}} = \dfrac{1}{7}$

d) Die Kugel K mit dem Mittelpunkt $N_t\left(\frac{t}{8} \mid \frac{t}{8} \mid -\frac{t}{8} \right)$ und dem Radius $\rho_t = \dfrac{|t|}{8}$ liegt

im selben Oktanten wie die Pyramide Π_t und berührt die drei Koordinatenebenen.

Ferner ist

$$d(N; E_t) = \left| \frac{2 \cdot \frac{t}{8} + \frac{t}{8} + \frac{2}{8} - t}{3} \right| = \left| -\frac{t}{8} \right| = \frac{t}{8}$$

N_t liegt auf der Ursprungsseite und ist damit Mittelpunkt der Inkugel der Pyramide Π_t.

e) M liegt auf der Mittenebene zu $[OB_t]$ mit der Gleichung $x_2 = -\dfrac{t}{2}$.

Analog ergibt sich $m_1 = \dfrac{t}{4}$ und $m_3 = -\dfrac{t}{4}$

$$r = \overline{OM} = \sqrt{\left(\frac{t}{4}\right)^2 + \left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{t}{4}\right)^2} = |t| \cdot \sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{|t|}{4}\sqrt{6}$$