Abitur 2006		Analytische Geometrie I

In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die

Ebene $E: x_2 - x_3 - 1 = 0$, die Geradenschar $g_k: \vec{x} = \begin{pmatrix} -k^2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und die Gerade

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ gegeben, wobei k, λ und μ aus IR sind.

1. a) Zeigen Sie:

   Alle Geraden der Schar g_k sind zueinander parallel und liegen in der Ebene E.

   b) Begründen Sie, dass die Schar der Geraden g_k eine Halbebene von E bildet.

   c) Für welche Werte von k schneidet g_k die Gerade h ?

   Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S. $\left[\text{Teilergebnis}: S\left(2 \mid \frac{5}{3} \mid \frac{2}{3}\right)\right]$

   d) Projiziert man h senkrecht auf E, so erhält man die Gerade h_E.

   Berechnen Sie den Winkel φ zwischen h_E und h in Grad auf eine Nachkommastelle gerundet.

---

2. Die Ebene E ist Tangentialebene an zwei Kugeln K_1 und K_2 mit den Radien $5\sqrt{2}$, deren Mittelpunkte M_1 und M_2 auf der Geraden h liegen.

   a) Bestimmen Sie die Koordinaten von M_1 und M_2. $\left[\text{Teilergebnis}: M\left(2 \mid 5 \mid -6\right)\right]$

   (Der Punkt mit ausschließlich ganzzahligen Koordinaten wird mit M_1 bezeichnet.)

   b) Die Kugelpunkte $P \in K_1$ und $Q \in K_2$ sind diejenigen Punkte, die minimale Distanz voneinander haben.

   Berechnen Sie die Entfernung $\overline{PQ}$ auf zwei Dezimalen gerundet.

   c) Spiegelt man die Ebene E am Punkt M_1, so erhält man die Ebene E^*.

   Geben Sie eine Gleichung von E^* in Normalenform an.

d) Zeigen Sie, dass die Punkte $A\left(-1 \mid 0 \mid -2\right)$ und $C\left(-1 \mid 1 \mid -1\right)$ auf der Kugel K_1 um

M_1 liegen, und bestimmen Sie die Koordinaten von B so, dass die Strecke $\left[AB\right]$ ein Durchmesser von K_1 ist.

$\left[\text{Teilergebnis}: B\left(5 \mid 10 \mid -10\right)\right]$

e) Das Dreieck ABC ist die Grundfläche einer Pyramide ABCD, deren Spitze D ebenfalls auf der Kugel K_1 liegt.

Alle Punkte D, für die die Pyramiden ABCD das Volumen 11 haben, bilden zwei Kreise auf der Kugelfläche (Nachweis nicht erforderlich).

Berechnen Sie zuerst die Höhe h dieser Pyramiden und anschließend mit Hilfe einer geeigneten Skizze den Radius R der beiden oben definierten Kreise.

$\left[\text{Zur Kontrolle}: h = \sqrt{11}\right]$

Lösung

===

1\. a) g_k in $E: 2\lambda - \left(-1+2\lambda\right) - 1 = 2\lambda + 1 - 2\lambda - 1 = 0$

Also liegt jede Gerade der Schar in E.

b) Umformung der Gleichung von g_k :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + k^2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d.h. alle Geraden der Schar verhält durch Verschiebung der Geraden

$$g_0: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit dem Verschiebungsvektor $\vec{v} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\alpha = k^2 \geq 0$.

Die Schargeraden bilden daher eine Halbebene von E.

c) h in E : $(1-\mu) - (2+2\mu) - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = -\frac{2}{3}$

$\mu = -\frac{2}{3}$ in h : $S\left(2 \,\middle|\, \frac{5}{3} \,\middle|\, \frac{2}{3}\right)$

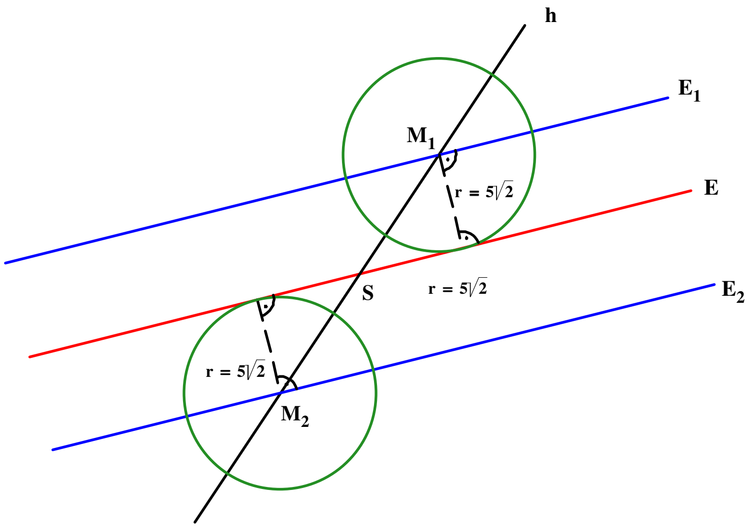
S in g_k : $2\lambda = \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{5}{6}$ und $-k^2 + \frac{5}{6} \cdot 3 = 2 \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \vee k = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Für $k = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \vee k = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ schneidet g_k die Gerade h.

d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -3 \quad \Rightarrow \quad \sin\varphi = \left| \frac{-3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} \right| = \frac{3}{\sqrt{10}} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 71{,}6°$

---

2. a)



Ebenen parallel zu E im Abstand $5\sqrt{2}$:

$E_1 : \frac{x_1 - x_2 - 1}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 - x_2 - 11 = 0$

$$E_2 : \frac{x_1 - x_2 - 1}{\sqrt{2}} = -5\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 - x_2 + 9 = 0$$

$$h \text{ in } E_1 : (1-\mu) - (2+2\mu) - 11 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = -4 \text{ ergibt } M_1(2 \mid 5 \mid -6)$$

$$h \text{ in } E_2 : (1-\mu) - (2+2\mu) + 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = \frac{8}{3} \text{ ergibt } M_2\left(2 \,\middle|\, -\frac{5}{3} \,\middle|\, \frac{22}{3}\right)$$

b) $\overline{M_1M_2} = \sqrt{\left(\frac{20}{3}\right)^2 + \left(\frac{40}{3}\right)^2} = \frac{20}{3}\sqrt{5}$

$$\overline{PQ} = \frac{20}{3}\sqrt{5} - 10\sqrt{2} \approx 0{,}76$$

c) Ist P ein Punkt auf E, dann ist

$$\overrightarrow{p^*} = \vec{p} + \overrightarrow{PM} = 2 \cdot \vec{m} - \vec{p}$$

der Ortsvektor des Punktes P^* auf E^*.

$P(0 \mid 1 \mid 0)$ liegt auf E.

$$\overrightarrow{p^*} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$E^* : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 - x_3 - 21 = 0$$

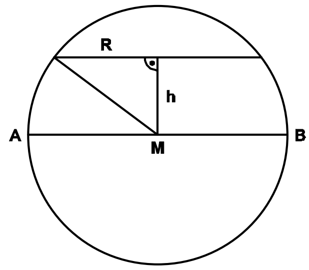
d) $\overline{M_1A} = \sqrt{3^2 + 5^2 + 4^2} = 5\sqrt{2}$ und $\overline{M_1C} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$

Also liegen A und C auf K_1.

$$\vec{B} = \vec{A} + 2 \cdot \overrightarrow{AM_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}$$

e) $\overline{AC} = \sqrt{2}$ und $\overline{BC} = 3\sqrt{22}$

$$\mathfrak{V}_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{22} \cdot h = 11 \text{ und damit } h = \sqrt{11}$$



Beachte : Das Dreieck ABC ist bei C rechtwinklig.

$$R^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2 - \sqrt{11}^2 = 39 \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{39}$$
