Stochastik 2006		Aufgabe IV

Die Firma VEGAS hat ein neues Gesellschaftsspiel entwickelt, bei dem neben Laplace-Würfeln auch spezielle Vegas-Würfel verwendet werden, die sich äußerlich von den Laplace-Würfeln nicht unterscheiden. Die Vegas-Würfel zeigen die Augen-zahl 6 mit der erhöhten W'keit $\frac{1}{3}$, während die anderen Augenzahlen untereinander gleich wahrscheinlich sind.

1. Zeigen Sie, dass der Erwartungswert der Zufallsgröße

   X . Augenzahl beim einmaligen Werfen eines Vegas-Würfels

   gleich 4 ist.

---

2. Auf dem Tisch liegen ungeordnet drei Laplace-Würfel und ein Vegas-Würfel. Ein Spieler nimmt davon zufällig drei Würfel und wirft sie gleichzeitig.

   Mit welcher W'keit erzielt er drei gleiche Augenzahlen, wenn er drei Laplace-Würfel genommen hat ?

   Mit welcher W'keit erzielt er drei gleiche Augenzahlen, wenn er zwei Laplace-Würfel und den Vegas-Würfel genommen hat ?

   Welche Folgerung können Sie aus Ihren Ergebnissen bezüglich der stochastischen Abhängigkeit der Ereignisse

   A : Er erzielt drei gleiche Augenzahlen

   und

   B : Er nimmt drei Laplace-Würfel

   ziehen ?

---

3. Um bei einem Würfel festzustellen, ob es sich um einen Laplace- oder Vegas-Würfel handelt, wird er 100-mal geworfen. Ein Vegas-Würfel soll mit einer W'keit von mindestens 99 % als solcher eingestuft werden.

   a) Bestimmen Sie hierzu die Entscheidungsregel anhand der Anzahl der geworfenen Sechser so, dass möglichst auch ein Laplace-Würfel richtig eingestuft wird.

   b) Mit welcher W'keit wird bei dieser Entscheidungsregel ein Laplace-Würfel falsch eingestuft?

Eine Packung des Spiels enthält - ungeordnet und äußerlich nicht unterscheidbar - 7 La-place- und 3 Vegas-Würfel.

4. Aus dieser Packung wird ein Würfel entnommen und 100-mal geworfen.

   Mit welcherW'keit handelt es sich um einen Vegas-Würfel, wenn dabei 25-mal eine 6 geworfen wird ?

---

5. Die 10 Würfel werden nun einzeln nacheinander aus der Packung entnommen und je 100-mal geworfen.

   a) Die Zufallsgröße X bezeichne die Anzahl der geworfenen Sechser unter den insgesamt 1000 durchzuführenden Würfen. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von X.

   b) Die Zufallsgröße X ist näherungsweise normalverteilt. Berechnen Sie mit Hilfe der Normalverteilung, mit welcher W'keit bei den 1000 Würfen mehr als 225-mal eine 6 geworfen wird.

---

6. Bei einem Spiel werden jeweils 5 Würfel geworfen. Aus den Augenzahlen - aufgefasst als Ziffern - werden möglichst große fünfstellige natürliche Zahlen gebildet, z. B. 43321, nicht jedoch 34312.

   a) Mit welcher W'keit erhält man eine Zahl größer als 50000, wenn es sich um 5 Laplace-Würfel handelt ?

   b) Wie viele verschiedene natürliche Zahlen können nach dieser Spielregel gebildet werden ? Wählen Sie aus den folgenden kombinatorischen Modellen zunächst das für dieses Problem passende aus und bestimmen Sie dann mit dessen Hilfe die gesuchte Anzahl.

   (A) Anzahl der fünfstelligen Zahlen aus den Ziffern 1 bis 6 dividiert durch die Zahl der Permutationen von 5 Elementen

   (B) Zahl der möglichen Verteilungen von 5 Kugeln auf 6 Urnen, wobei es nur auf die jeweilige Anzahl der Kugeln in den Urnen ankommt

   (C) Zahl der möglichen Verteilungen von 6 Kugeln auf 5 Urnen, wobei es nur auf die jeweilige Anzahl der Kugeln in den Urnen ankommt

---

Lösung

===

1. Wahrscheinlichkeitsverteilung

x	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$

$$E(X) = \frac{2}{15}\cdot(1+2+3+4+5)+\frac{1}{3}\cdot 6 = 4$$

---

2. $P(E|L) = 6\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ bzw. $P(E|V) = 5\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{15} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{54}+\frac{1}{108} = \frac{1}{36}$

   Die Ereignisse A und B sind voneinander unabhängig.

---

3. a) Nullhypothese H_0: $p = p_0 = \frac{1}{3}$

Gegenhypothese $H_1 : p = p_1 = \frac{1}{6}$

Annahmebereich : $\mathbb{A} = \left\{k+1; ....; 100\right\}$ Ablehnungsbereich : $\overline{\mathbb{A}} = \left\{0; 1; 2; ....; k\right\}$

Bedingung : $P\left(X \in \mathbb{A}\right) \geq 0{,}99 \quad \Leftrightarrow \quad P\left(X \leq k\right) \leq 0{,}01 \quad \Leftrightarrow \quad F^{100}_{\frac{1}{3}}(k) \leq 0{,}01$

$\Rightarrow \quad k = 22$

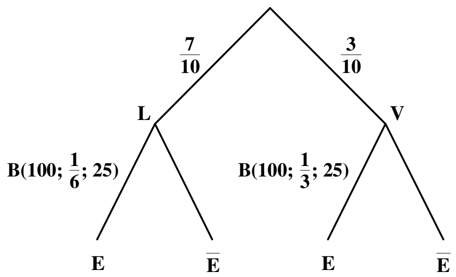
$\mathbb{A} = \left\{23; ...; 100\right\}$ und $\overline{\mathbb{A}} = \left\{0; ....; 22\right\}$

Werden mindestens 23 Sechsen geworfen, dann nimmt man an, dass es sich um einen Vegas-Würfel handelt.

b) Es ist der Fehler zweiter Art zu berechnen.

$\beta = P\left(X \geq 23\right) = 1 - P\left(X \leq 22\right) = 1 - F^{100}_{\frac{1}{6}} \approx 6{,}3\%$ (Stochastik-Tabelle)

4.



$$P\left(V \mid E\right) = \frac{P\left(V \cap E\right)}{P(E)} = \frac{\frac{3}{10} \cdot B\left(100; \frac{1}{3}; 25\right)}{\frac{3}{10} \cdot B\left(100; \frac{1}{3}; 25\right) + \frac{7}{10} \cdot B\left(100; \frac{1}{6}; 25\right)} \approx 43{,}7\%$$

---

5. a) $E(X) = \frac{7}{10} \cdot 1000 \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{10} \cdot 1000 \cdot \frac{1}{3} = 216\frac{2}{3}$

$\mathrm{Var}(X) = 700 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + 300 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 163\frac{8}{9}$

b) $P\left(X > 225\right) = 1 - P\left(X \leq 225\right) = 1 - \Phi\left(\dfrac{225 - 216\frac{2}{3} + 0{,}5}{\sqrt{163\frac{8}{9}}}\right) = 1 - \Phi\left(0{,}69\right) =$

$= 1 - 0{,}75490 \approx 24{,}5\%$

---

6. a) Es muss mindestens eine Augenzahl größer als 4 gewürfelt werden.

$$P\left(X \geq 1\right) = 1 - P\left(X = 0\right) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5 \approx 86{,}8\%$$

b) Das Modell B ist richtig.

Es gibt $\dfrac{(5+5)!}{5! \cdot 5!} = 252$ verschiedene Zahlen.
