Abitur 2006		Infinitesimalrechnung I

1.Gegeben ist die Schar der Funktionen

$f_k : x \rightarrow \dfrac{k}{1+e^{-kc}}$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ und Definitionsmenge $\mathbb{R}$. G_k bezeichnet den Graphen von f_k.

a) Untersuchen Sie das Verhalten von f_k für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$.

b) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von f_k und geben Sie die Wertemenge an.

$$\left[\text{Mögliches Zwischenergebnis : } f_k'(x) = \frac{k^2 e^{-kx}}{(1+e^{-kx})^2}\right]$$

c) Weisen Sie nach, dass der Punkt $W_k\left(0; \dfrac{k}{2}\right)$ der einzige Wendepunkt von G_k ist.

d) Weisen Sie nach, dass für alle $k \in \mathbb{R}^+$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt : $f_k(x) + f_k(-x) = k$

Begründen Sie damit die Symmetrie von G_k zum Punkt W_k.

e) Die beiden Koordinatenachsen und G_k begrenzen im zweiten Quadranten ein sich ins Unendliche erstreckendes Flächenstück.

Veranschaulichen Sie dieses Flächenstück in einer Skizze. Zeigen Sie, dass das Flächenstück den endlichen Inhalt ln2 besitzt.

(Hinweis: Für die Integration ist es hilfreich, den Funktionsterm mit e^{kx} zu erweitern.)

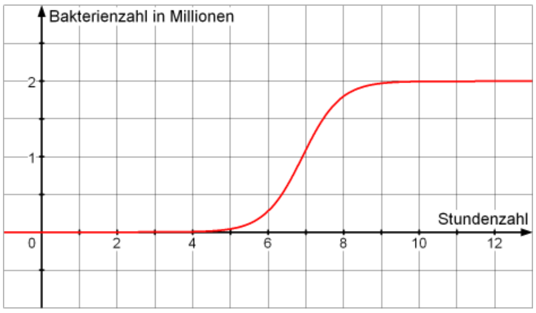
---

2. Bei vielen Wachstumsvorgängen ist kein unbeschränktes Wachstum möglich. Dies gilt z. B. auch für eine Bakterienkultur, deren Bakterienzahl schließlich einer oberen Grenze entgegenstrebt.

Die Zahl der Bakterien einer Kultur wird näherungsweise durch die Funktion N mit

$$N(x) = 10^6 \cdot \frac{2}{1+e^{-2\cdot(x-6,908)}}, \; x \geq 0$$

beschrieben. Dabei gibt x die Zeit in Stunden an, die seit dem Ansetzen der Bakterienkultur vergangen ist. Die Abbildung zeigt den Graphen von N.



a) Geben Sie an, wie der Graph von N aus G_2 der Aufgabe 1 entsteht.

b) Mit wie vielen Bakterien wurde die Kultur angesetzt, wie viele Bakterien sind es nach zwei Stunden ?

c) Berechnen Sie, nach welcher Zeit 90 % des Grenzbestandes von 2 Millionen Bakterien erreicht sind.

d) Schätzen Sie rechnerisch ab, wie viele Bakterien in der Minute stärksten Wachstums hinzukommen.

Lösung

==

1. a) $\lim\limits_{x \to \infty} f_k(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{k}{1+e^{-kx}} = k$ weil $\lim\limits_{x \to \infty} e^{-kx} = 0$

und

$$\lim_{x \to -\infty} f_k(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{k}{1+e^{-kx}} = 0 \text{weil} \lim_{x \to -\infty} e^{-kx} = \infty$$

b) $f_k'(x) = \dfrac{k^2 e^{-kx}}{\left(1+e^{-kx}\right)^2} > 0$ d. h. f ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton zunehmend.

Also $W_{f_k} =]0; k[$

c) $$f_k''(x) = \frac{-k^3 e^{-kx} \cdot \left(1+e^{-kx}\right)^2 - k^2 e^{-kx} \cdot 2 \cdot \left(1+e^{-kx}\right) \cdot (-k) \cdot e^{-kx}}{\left(1+e^{-kx}\right)^4} =$$

$$= \frac{-k^3e^{-kx}\cdot\left(1+e^{-kx}\right) + 2k^3\cdot e^{-2kx}}{\left(1+e^{-kx}\right)^3} = \frac{k^3\cdot e^{-2kx} - k^3\cdot e^{-kx}}{\left(1+e^{-kx}\right)^3} = k^3e^{-kx}\cdot\frac{e^{-kx}-1}{\left(1+e^{-kx}\right)^3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0$$

$$f_k(0) = \frac{k}{1+e^0} = \frac{k}{2}$$

mit $f_k''(x) > 0$ für $x < 0$ und $f_k''(x) < 0$ für $x > 0$

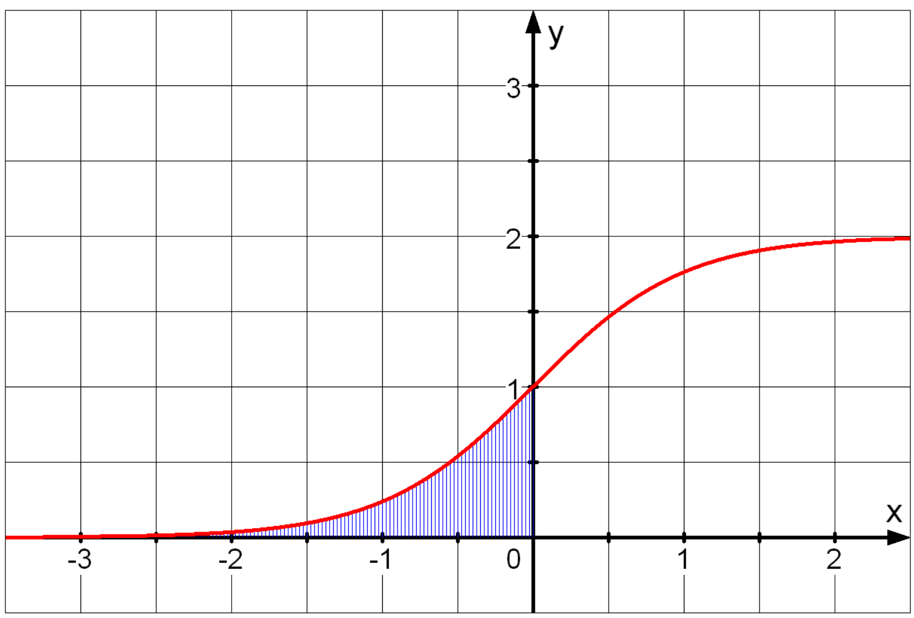
d. h. $W_k\left(0;\ \frac{k}{2}\right)$ ist der einzige Wendepunkt von G_k.

d) $f_k(x) + f_k(-x) = \frac{k}{1+e^{-kx}} + \frac{k}{1+e^{kx}} = k\cdot\frac{1+e^{kx}+1-e^{-kx}}{(1+e^{-kx})\cdot(1+e^{kx})} = k$

$$f_k(x) + f_k(-x) = k \quad \Leftrightarrow \quad f_k(x) - \frac{k}{2} = \frac{k}{2} - f_k(-x)$$

Damit ist G_k zu W_k punktsymmetrisch.

e)



Unbestimmtes Integral :

$$\int \frac{k}{1+e^{-kx}}\,dx = \int \frac{k\cdot e^{kx}}{e^{kx}+1}\,dx = \ln\left|1+e^{kx}\right| + C \text{ (logarithmische Integration)}$$

$$A(a) = \int_a^0 \frac{k}{1+e^{-kx}}\,dx = \Big[\ln\left|1+e^{kx}\right|\Big]_a^0 = \ln 2 - \ln\left|1+e^{ax}\right|$$

$$\lim_{a\to-\infty} A(a) = \ln 2$$

---

2. a) Verschiebung mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6{,}908 \\ 0 \end{pmatrix}$ und Affinität in y-Richtung mit dem Faktor 10^6.

b) $N(0) = 10^6\cdot\dfrac{2}{1+e^{-2\cdot(0-6{,}908)}} = 2 \quad N(2) = 10^6\cdot\dfrac{2}{1+e^{-2\cdot(2-6{,}908)}} = 109$

c) $\dfrac{1}{1+e^{-2\cdot(x-6{,}908)}} = 0{,}9 \quad\Rightarrow\quad e^{-2\cdot(x-6{,}908)} = \dfrac{1}{9} \quad\Rightarrow\quad x = -\dfrac{1}{2}\cdot\ln\dfrac{1}{9} + 6{,}908 \approx 8$

d) Im Wendepunkt hat die Ableitung von N den größten Wert d.h. das Wachstum hier am größten.

$$\frac{1}{60}\cdot N'(6{,}908) = \frac{1}{60}\cdot 10^6 = 16667$$
