Abitur 2005		Analytische Geometrie II

In einem kartesischen Koordinatensystem ist die Geradenschar $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a+2 \end{pmatrix}$

mit $a, \lambda \in \mathbb{R}$ gegeben.

Die Punkte

$A(10\,|\,0\,|\,0)$, $B(0\,|\,5\,|\,0)$ und $A(0\,|\,0\,|\,5)$

bestimmen eine Ebene, die mit E bezeichnet wird.

1. a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.

$$\left[\text{Mögliches Ergebnis}: x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 10 = 0\right]$$

b) Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen der Geraden g_{-1} und der Ebene E.

c) Zeigen Sie, dass die Gerade g_{-2} in der Ebene E liegt und echt parallel zur Geraden AB ist.

---

2. a) Der Punkt C wird an der Geraden AB gespiegelt. Ermitteln Sie die Koordinaten des Spiegelpunkts C^*.

b) Weisen Sie nach, dass das Drachenviereck AC^*BC den Flächeninhalt75 hat.

c) Die Gerade g_{-2} schneidet die Strecke im Punkt $A'\left(8\,\middle|\,0\,\middle|\,1\right)$ und zerlegt das Dreieck ABC in zwei Teile (Nachweis nicht erforderlich).

Berechnen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte dieser beiden Teile.

---

3. In der Ebene $H: x_3 = 2$ liegen zwei parallele Schienen s_1 und s_2. Die Schiene s_1 wird

durch die Gerade $s_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\tau \in \mathbb{R}$ dargestellt.

Auf den Schienen s_1 und s_2 ruht eine Kugel mit dem Mittelpunkt $M(18\,|\,28\,|\,5)$ und dem Radius $r = 3$.

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Punkts S, in dem die Kugel die Schiene s_1 berührt.

b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schiene s_2.

c) Die Kugel wird nun angestoßen und rollt auf die Ebene E zu. Geben Sie eine Gleichung der Geraden m an, auf der sich dabei der Mittelpunkt der Kugel bewegt.

Begründen Sie, weshalb der Punkt, in dem die Kugel schließlich die Ebene E berührt nicht mit dem Schnittpunkt von m und E zusammenfällt.

Lösung

===

1. a) Achsenabschnittsform E : $\frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{5} + \frac{x_3}{5} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 10 = 0$

b) Richtungsvektor von g_{-1} : $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normalenvektor von E : $\vec{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Skalarprodukt dieser Vektoren : $\vec{v} \cdot \vec{n_E} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 3$

Beträge dieser Vektoren : $|\vec{v}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \qquad |\vec{n_E}| = \sqrt{1+4+4} = 3$

Winkel : $\sin\varphi = \left| \frac{3}{\sqrt{3} \cdot 3} \right| \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 35{,}3°$

c) Gerade g_{-2} : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Eingesetzt in E : $4 - 2\lambda + 2\cdot(2+\lambda) + 2 - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad g_{-2} \subset E$

Richtungsvektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AB \parallel g_{-2}$

Durch Einsetzen von A in g_{-2} ergibt sich $A \notin g_{-2}$.

---

2. a) Gerade AB : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ansatz für den Lotfußpunkt F des Lotes von C auf AB : $\vec{f} = \begin{pmatrix} 10-2\mu \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix}$

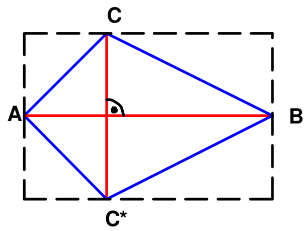
Richtungvektor $\overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} 10-2\mu \\ \mu \\ -5 \end{pmatrix}$

Bedingung : $\begin{pmatrix} 10-2\mu \\ \mu \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \mu = 4$

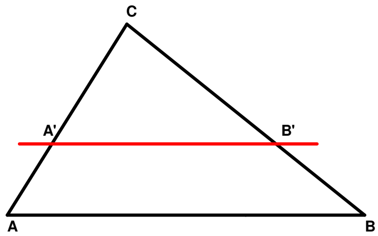
Spiegelpunkt : $\overrightarrow{c^*} = \vec{c} + 2 \cdot \overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} \quad C^*(4 \mid 8 \mid -5)$

b) Längen der Diagonalen : $\overline{AB} = \sqrt{100+25} = 5\sqrt{5} \quad \overline{C^*C} = 2 \cdot \sqrt{4+16+25} = 6\sqrt{5}$

Flächeninhalt : $\mathfrak{A}_{AC^*BC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{C^*C} = 75$



c) $\overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{A'C} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AA'} = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{A'C}$



$$\Rightarrow \quad \frac{\mathfrak{A}_{A'B'C}}{\mathfrak{A}_{ABB'A'}} = \frac{\frac{16}{25} \cdot \mathfrak{A}_{ABC}}{\frac{9}{25} \cdot \mathfrak{A}_{ABC}} = \frac{16}{9}$$

---

3. a) Lotebene zu s_1 durch M : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 18 \\ 28 \\ 5 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + 2x_2 - 74 = 0$

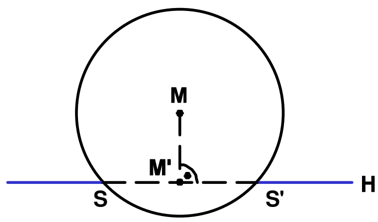
Schnitt dieser Lotebene mit s_1 : $7 + \tau + 2 \cdot (1 + 2\tau) - 74 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = 13$

In s_1 eingesetzt ergibt sich $S(20 \mid 27 \mid 3)$

b) Projektion von M in die Ebene H : $M'(18 \mid 28 \mid 3)$

Berührpunkt S' der Kugel mit s_2 : $\vec{s'} = \vec{s} + 2 \cdot \overrightarrow{SM'} = \begin{pmatrix} 10 \\ 27 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 29 \\ 3 \end{pmatrix}$

Gleichung von s_2 : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 29 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$



c) Gleichung von m : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 18 \\ 28 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Gerade m verläuft nicht senkrecht zu E.
