

1. In einem Tonstudio wird eine CD mit 8 Liedern und 5 Instrumentalstücken zusammengestellt.
- a) Auf wie viele Arten können die 13 Musikstücke angeordnet werden, wenn nur zwischen den Kategorien Lied und Instrumentalstück unterschieden wird?
- b) Die CD wird in einem CD-Player mit der Random-Funktion abgespielt, so dass die 13 Musikstücke in zufälliger Reihenfolge ohne Wiederholung aufeinander folgen.
- Wie groß ist die W'keit, dass unter den ersten vier gespielten Stücken höchstens zwei Instrumentalstücke sind ?
- c) 20 Personen geben jeweils ihrem Favoriten unter den 8 Liedern eine Stimme. Wie viele verschiedene Stimmverteilungen sind möglich, wenn es nur darauf ankommt, wie viele Stimmen die einzelnen Lieder erhalten ?
-

2. Von allen in einem Musikladen verkauften CDs entfallen 25% auf klassische Musik und 30% auf Volksmusik. Der Rest wird der Popmusik zugeordnet. 60% der Käufer einer Klassik-CD und 25% der Käufer einer Popmusik-CD sind älter als 30 Jahre.

Insgesamt werden 48% der verkauften CDs von Kunden erworben, die älter als 30 Jahre sind.

- a) Ein Kunde betritt den Musikladen und kauft eine Volksmusik-CD.

Mit welcher W'keit ist er höchstens 30 Jahre alt?

- b) Mit welcher W'keit kauft ein Kunde, der älter als 30 Jahre ist, eine Klassik- oder Popmusik-CD ?
-

3. Der Musikladen bezieht seine Ware zu gleichen Teilen von den Großhändlern A und B. A liefert ausnahmslos Originalware. In jeder Lieferung des Großhändlers B befinden sich 15% willkürlich eingestreute Raubkopien, die nur dadurch erkannt werden können, dass diesen CDs der Kopierschutz fehlt.

- a) Wie viele zufällig aus dem Musikladen ausgewählte CDs muss man mindestens überprüfen, um mit einer W'keit von mehr als 90% mindestens eine Raubkopie zu entdecken ? Rechnen Sie wie bei Ziehen mit Zurücklegen.

- b) Eine Lieferung von 500 CDs von Großhändler B wird untersucht. Bestimmen Sie den kleinstmöglichen Bereich symmetrisch zum Erwartungswert, in dem die Zahl der Raubkopien mit einer W'keit von mindestens 80% liegt.

Näherung mit der Normalverteilung !

4. Der Betrug von Großhändler B wurde aufgedeckt. Er behauptet, dass er keinesfalls mehr als 15% Raubkopien untergemischt habe. Es werden zufällig 200 CDs aus seinen Lieferungen ausgewählt und überprüft.

- a) Bestimmen Sie die Entscheidungsregel mit der Behauptung des Großhändlers als Nullhypothese auf dem Signifikanzniveau von 5%.
- b) In welchem kleinstmöglichen Bereich liegt die W'keit, dass bei dieser Entscheidungsregel die Nullhypothese trotz eines Raubkopieanteils von mindestens 25% nicht abgelehnt wird?

Lösung

1. a) Es gibt $\frac{13!}{8! \cdot 5!} = 1287$ Möglichkeiten der Anordnung.

$$b) |\Omega| = 1287$$

$$|E| = \frac{9!}{5! \cdot 4!} + \frac{4!}{1! \cdot 3!} \cdot \frac{9!}{5! \cdot 4!} + \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{9!}{6! \cdot 3!} = 630$$

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} \approx 88,1\%$$

c) Es sind $\frac{(20+7)!}{20! \cdot 7!} = 888030$ verschiedene Stimmverteilungen möglich.

2. K : Eine CD mit klassischer Musik wird verkauft

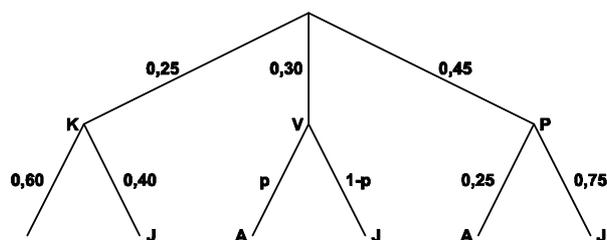
V : Eine CD mit Volksmusik wird verkauft

P : Eine CD mit Popmusik wird verkauft.

A : Die Person ist älter als 30 Jahre ($\bar{A} = J$)

$$P(K) = 0,25 \quad P(V) = 0,30 \quad P(P) = 0,55$$

$$P(A|K) = 0,60 \quad P(A|P) = 0,25 \quad P(A) = 0,46$$



$$a) P(A) = 0,25 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot p + 0,45 \cdot 0,25 = 72,5\%$$

$$\Rightarrow P(J|V) = 27,5\%$$

$$b) P(K \cup P | A) = \frac{0,25 \cdot 0,6 + 0,45 \cdot 0,25}{0,48} \approx 54,7\%$$

3. a) R : Die CD ist eine Raubkopie

$$P(R) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 0}_{\text{CD von A}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 0,15}_{\text{CD von B}} = 0,075$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) > 0,9 \Leftrightarrow P(X=0) < 0,1 \Leftrightarrow 0,925^n < 0,1$$

$$n > \frac{\ln 0,1}{\ln 0,925} \approx 29,53$$

Man muss mindestens 30 CDs überprüfen.

b) Erwartungswert : $\mu = 500 \cdot 0,15 = 75$

$$\text{Varianz} : \sigma^2 = 0,85 \cdot 0,15 \cdot 500 = 63,75$$

$$P(75 - k \leq X \leq 75 + k) \geq 0,80 \Leftrightarrow P(X \leq 75 + k) - P(X \leq 75 - k - 1) \geq 0,80$$

$$\Phi\left(\frac{k+0,5}{\sqrt{63,75}}\right) - \Phi\left(\frac{k-1+0,5}{\sqrt{63,75}}\right) \geq 0,80 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{k+0,5}{\sqrt{63,75}}\right) \geq 0,9$$

$$\frac{k+0,5}{\sqrt{63,75}} \geq 1,282 \Rightarrow k \geq 10$$

Die Anzahl der Raubkopien liegt mit mindestens 80% Wahrscheinlichkeit im Intervall

$$[65; 85]$$

4. a) Nullhypothese $H_0 : p \leq p_0 = 0,05$

Gegenhypothese $H_1 : p > p_0 = 0,05$

$$\text{Annahmebereich} : \mathbb{A} = \{0; \dots; k\} \quad \text{Ablehnungsbereich} : \bar{\mathbb{A}} = \{k+1; \dots; 1000\}$$

$$\text{Bedingung} : \alpha = P(X \in \bar{\mathbb{A}}) \leq 0,05 \Leftrightarrow P(X \geq k+1) \leq 0,05 \Leftrightarrow P(X \leq k) \geq 0,95$$

$$\Phi\left(\frac{k-30+0,5}{\sqrt{200 \cdot 0,15 \cdot 0,85}}\right) \geq 0,95 \Rightarrow \frac{k-29,5}{\sqrt{25,5}} \geq \Phi^{-1}(0,95) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{k-29,5}{\sqrt{25,5}} \geq 1,6449 \Rightarrow k \geq 38$$

$$\mathbb{A} = \{0; \dots; 38\} \text{ und } \overline{\mathbb{A}} = \{39; \dots; 200\}$$

$$\text{b) } P = P(X \leq 38) = \Phi\left(\frac{38-50+0,5}{\sqrt{200 \cdot 0,25 \cdot 0,75}}\right) = \Phi\left(\frac{38-50+0,5}{\sqrt{200 \cdot 0,25 \cdot 0,75}}\right) \approx \Phi(-1,88) \approx 2,8\%$$
