1. Gegeben ist die Funktion $f: x \to \ln\frac{-1}{1+x}$ mit dem maximal Definitionsbereich D.

   Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

   a) Bestimmen Sie D, die Nullstelle von f sowie das Verhalten von f an den Rändern von D.

   b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f.

   c) Warum besitzt f eine Umkehrfunktion? Geben Sie die Definitionsmenge der Umkehrfunktion f^{-1} an und ermitteln Sie den Funktionsterm $f^{-1}(x)$.

   d) Skizzieren Sie unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse die Graphen der Funktionen f und f^{-1} in ein Koordinatensystem.
   Tragen Sie dazu auch alle Asymptoten sowie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen ein.

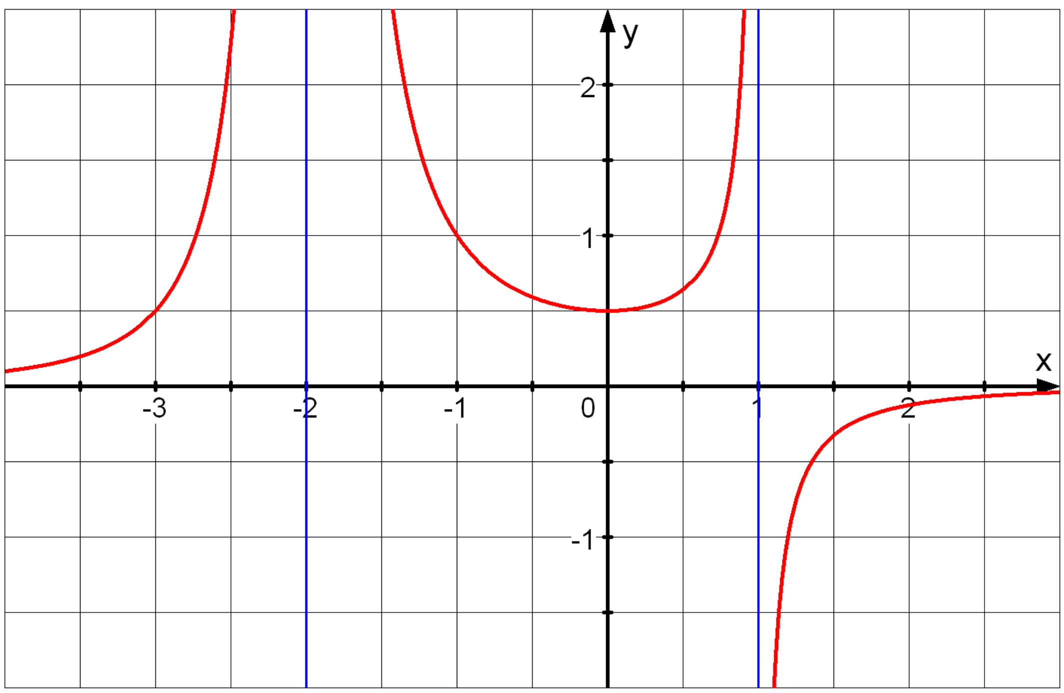
   e) Der Graph , die x-Achse und die Gerade $x = -1$ schließen im zweiten Quadranten ein sich ins Unendliche erstreckendes Flächenstück mit endlichem Inhalt ein.

   Berechnen Sie den Inhalt dieses Flächenstücks.

---

2. Es sei g eine in $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion mit dem Graphen G_g. Die Abbildung zeigt den Graphen G_u der in $\mathbb{R}\backslash\{-2; 1\}$ definierten Funktion $u: x \to u(x) = \frac{1}{g(x)}$.

   Die x-Achse und die Geraden $x = -2$ und $x = 1$ sind Asymptoten von G_u.



Zur Bearbeitung der folgenden Teilaufgaben können benötigte Werte aus der Abbildung näherungsweise abgelesen werden.

a) Geben Sie die Nullstellen von g an. Ermitteln Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von und G_u und G_g.

b) Begründen Sie, dass G_g in $x = -2$ und $x = 0$ waagrechte Tangenten hat.

c) Zeigen Sie, dass für alle Schnittpunkte von G_u und G_g gilt $g'(x) = -u'(x)$.

Ermitteln Sie , indem Sie möglichst genau aus obiger Abbildung ablesen. (Entsprechende Hilfslinien sind einzuzeichnen.)

d) Geben Sie g(0) an. Skizzieren Sie in obige Abbildung unter Berücksichtigung der gewonnenen Ergebnisse einen möglichen Graphen .

Lösung

===

1. a) Definitionsmenge : $\frac{-1}{x+1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x+1<0 \quad \Leftrightarrow \quad x<-1$

Also ist $D =]-\infty; -1[$.

Nullstelle :

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\frac{-1}{x+1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-1}{x+1} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 = x+1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln\frac{-1}{x+1} = -\infty \text{ weil } \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{x+1} = 0+0 \text{ und } \lim_{u\to 0+0} \ln u = -\infty$$

$$\lim_{x\to-1-0} f(x) = \lim_{x\to-1-0} \ln\frac{-1}{x+1} = \infty \text{ weil } \lim_{x\to-1-0} \frac{-1}{x+1} = \infty \text{ und } \lim_{u\to\infty} \ln u = \infty$$

b) $f'(x) = \frac{1}{\frac{-1}{x+1}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x+1} > 0$ für $x \in D$.

f ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton zunehmend.

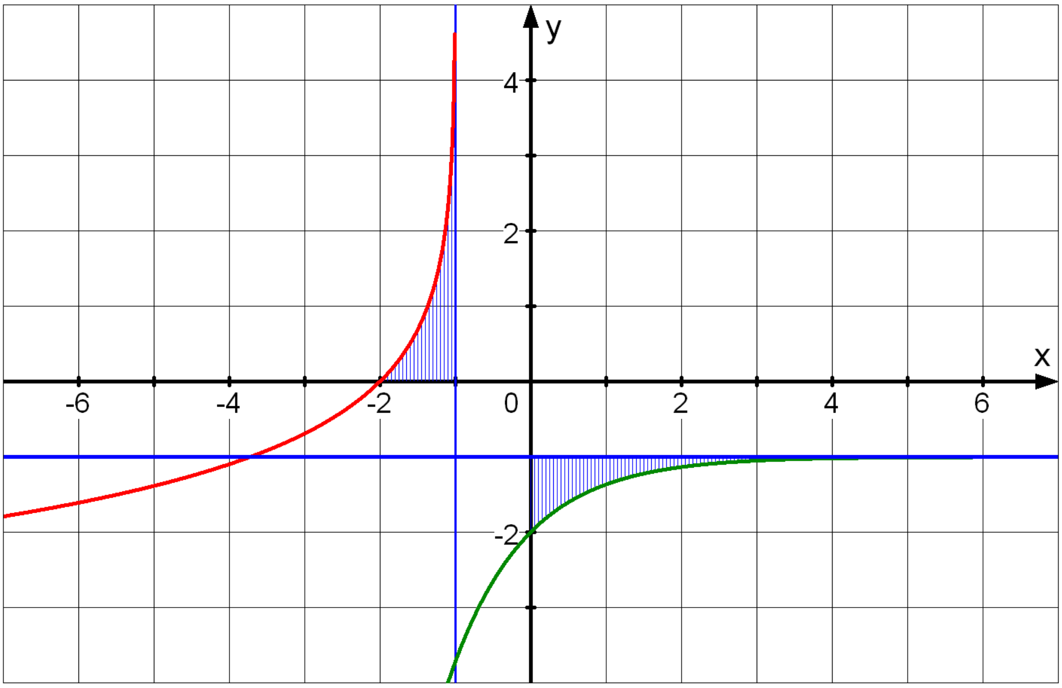
c) Also streng monotone Funktion ist f umkehrbar.

Defintionsmenge von f_{-1} : $D_{f^{-1}} = W_f = \mathbb{R}$

$$y = \ln\frac{-1}{x+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{x+1} = e^y \quad \Rightarrow \quad x+1 = -\frac{1}{e^y} \quad \Rightarrow \quad x = -1-\frac{1}{e^y}$$

$$\Rightarrow \quad f^{-1}(x) = -1-\frac{1}{e^x} = -1-e^{-x}$$

d)



e) Beachte die Gleichheit der schraffierten Flächen !

$$A(a) = \int_0^a [-1-(-1-e^{-x})]dx = \int_0^a e^{-x}dx = \Big[-e^{-x}\Big]_0^a = -e^{-a}+1$$

$$\lim_{a\to\infty} A(a) = 1$$

---

2. a) Nullstellen : $x = -2$ und $x = 1$

$$u(x) = g(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{g(x)} = g(x) \quad \Rightarrow \quad [g(x)]^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad g(x) = 1 \ \vee\ g(x) = -1$$

$$\Rightarrow \quad u(x) = 1 \ \vee\ u'(x) = -1 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \ \vee\ x \approx 0{,}75 \ \vee\ x \approx 1{,}2$$

b) $x = -2$ ist eine Nullstelle gerader Ordnung von g.

Also hat der Graph von g bei $x = -2$ einen Tiefpunkt.

Als Graph einer differenzierbaren Funktion hat G_g also bei $x = -2$ eine waagrechte Tangente.

Der Graph G_g bei $x = 0$ den Hochpunkt $H\left(0; 2\right)$ und damit in $x = 0$ eine weitere waagrechte Tangente.

c) $u(x) = \dfrac{1}{g(x)} \quad \Rightarrow \quad u'(x) = -\dfrac{g'(x)}{[g(x)]^2}$

Für die Schnittpunkte von G_u und G_g gilt aber $[g(x)]^2 = 1$

$u'(-1) \approx -1{,}3 \quad \Rightarrow \quad g'(1) = 1{,}3$

d) $g(0) = \dfrac{1}{0{,}5} = 2$