Abitur 2004		Analytische Geometrie II

In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $O(0\,|\,0\,|\,0)$, $A(10\,|\,0\,|\,0)$, $B(0\,|\,4\,|\,0)$ und $S(0\,|\,0\,|\,6)$

sowie die Ebenenschar $E_t: 3x_2 + tx_3 - 3t = 0$ mit $t \in \mathbb{R}$ gegeben.

Die Punkte A, B und S legen die Ebene F fest.

1. a)Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F in Normalenform.

b) Berechnen Sie, unter welchem Winkel die Ebene F die x_1x_2-Ebene schneidet.

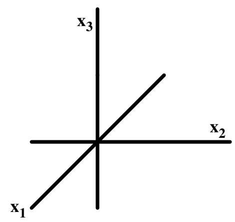
c) Zeigen Sie, dass die Ebene E_2 parallel zur Geraden BS ist.

d) Zeigen Sie, dass die zu AO parallele Mittelparallele des Dreiecks AOS identisch ist mit der Geraden p, die alle Ebenen der Schar E_t gemeinsam haben.

---

2. Die Punkte A, B, O und S bilden die Ecken der Pyramide ABOS.

a) Legen Sie ein Koordinatensystem an. Zeichnen Sie die Pyramide ABOS, die Gerade p und die Schnittfläche der Ebene E_2 mit der Pyramide ein.



b) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide ABOS.

c) Zeigen Sie, dass die Ebene E_2 die Pyramide ABOS in zwei Teilkörper mit gleichem Volumen zerlegt.

Hinweis: Zerlegen Sie einen der beiden Teilkörper in ein dreiseitiges Prisma und eine dreiseitige Pyramide.

3.a) Zeigen Sie, dass $M(1{,}2\,|\,1{,}2\,|\,1{,}2)$ der Mittelpunkt der Inkugel K der Pyramide ABOS ist.

b) Die Ebenenschar E_t enthält neben der x_1x_3-Ebene eine weitere Tangentialebene der Kugel K. Berechnen Sie den zugehörigen Wert von t.

Lösung

===

1. a) Achsenabschnittsform F : $\frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{6} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 6x_1 + 15x_2 + 10x_3 - 60 = 0$

b) Sei K_{12} die x_1x_2-Koordinatenebene.

Mit $\overrightarrow{n_{K_{12}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$ ergibt sich $\cos\varphi = \left| \frac{10}{1 \cdot 19} \right| \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 58{,}2°$

c) Ebene $E_2 : 3x_2 + 2x_3 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Gerade BS : $\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

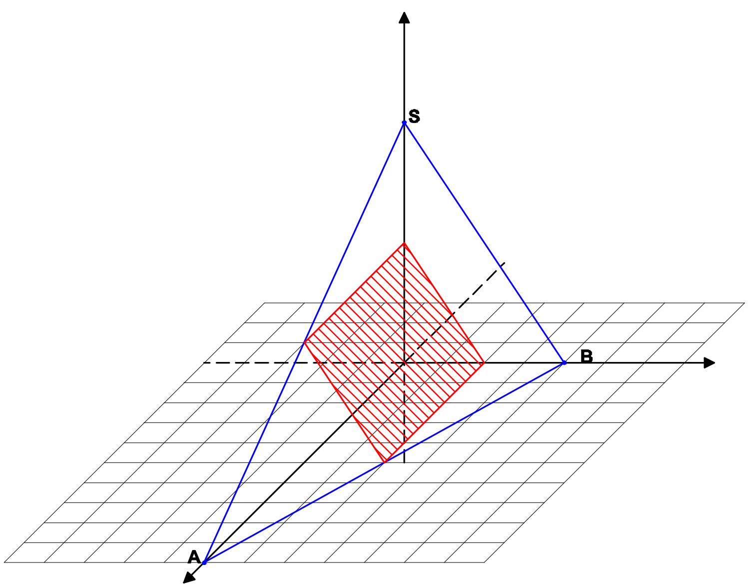
$\overrightarrow{n_{E_2}} \cdot \overrightarrow{BS} = -12 + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad BS \parallel E_2$

d) Gleichung der Mittelparallele m : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Eingesetzt in $E_t : 3 \cdot 0 + 3t - 3t = 0 \quad \Rightarrow \quad m \equiv p$

---

2. a)



b) $\mathfrak{V}_{ABOS} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6\cdot 10 = 40$

c) $\mathfrak{V}_1 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot 5 + \frac{1}{8}\cdot 40 = 15 + 5 = 20 \quad\Rightarrow\quad \mathfrak{V}_2 = 20$

---

3. a) HNF von F : $\frac{6x_1 + 15x_2 + 10x_3 - 60}{19} = 0 \quad\Rightarrow\quad d(M; F) = \left|\frac{7{,}2 + 18 + 12 - 60}{19}\right| = 1{,}2$

b) HNF von E_t : $\frac{3x_2 + tx_3 - 3t}{\pm\sqrt{9 + t^2}} = 0$

Bedingung : $d(M; E_t) = \left|\frac{3{,}6 + 1{,}2t - 3t}{\pm\sqrt{9 + t^2}}\right| = 1{,}2$

$$\Rightarrow \quad (3{,}6 - 1{,}8t)^2 = 1{,}44\cdot(9 + t^2) \quad\Rightarrow\quad t = 0 \vee t = \frac{36}{5} = 7{,}2$$
