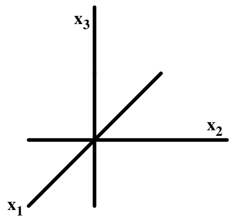
In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte

$A\left(-2\mid 5\mid -2\right)$, $B\left(1\mid 2\mid -2\right)$, $C\left(10\mid 5\mid 1\right)$ sowie die Ebene

$E: x_1 + x_2 - 4x_3 + 7 = 0$

gegeben.

1. a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts D so, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist, und berechnen Sie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunkts M.



Legen Sie ein Koordinatensystem an (Querformat, Ursprung in Seitenmitte) und tragen Sie das Parallelogramm ABCD sowie den Punkt M ein.

b) Zeigen Sie, dass das Parallelogramm ABCD in einer Parallelebene zur Ebene E liegt, die nicht mit E identisch ist.

c) Die Parallelogrammfläche schneidet die x_1x_2-Ebene in der Strecke $\left[GH\right]$.

Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte G und H und tragen Sie die Strecke $\left[GH\right]$ in die angelegte Zeichnung ein.

d) In welchem Verhältnis wird die Fläche des Parallelogramms durch die x_1x_2-Ebene geteilt ? Begründen Sie Ihre Antwort.

---

2. a) S ist der Punkt in E, der vom Diagonalenschnittpunkt M den geringsten Abstand hat. Berechnen Sie die Koordinaten von S und zeichnen Sie die Pyramide ABCDS in Ihre Zeichnung ein.

b) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide ABCDS.

---

3. S' sei der Spiegelpunkt von S bezüglich der Ebene, in der das Parallelogramm ABCD liegt.

a) Berechnen Sie die Koordinaten von S' und tragen Sie S' in die Zeichnung ein.

In S' sei eine punktförmige Lichtquelle angebracht. Die Parallelogrammfläche sei lichtundurchlässig. Die Lichtquelle erzeugt von diesem Parallelogramm in der Ebene E das Schattenbild .

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Bildpunktes A' von A.

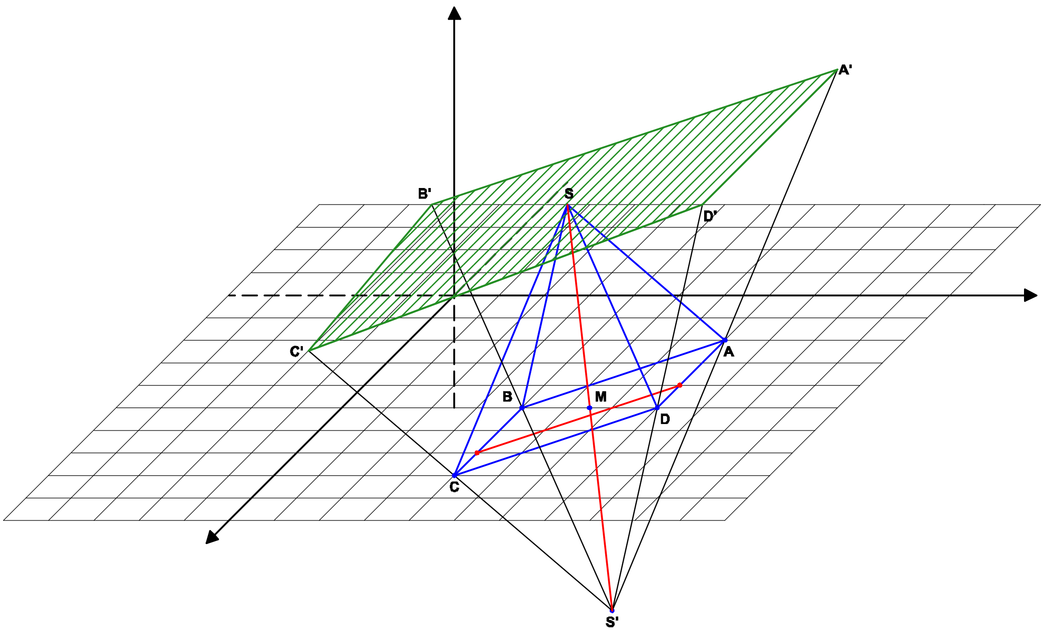
Tragen Sie ohne weitere Rechnung das Bildviereck A'B'C'D' in die Zeichnung ein.

Lösung

===

1\. a) $\vec{d} = \vec{a} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \quad D(7 \mid 8 \mid 1)$

$\vec{m} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{c}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} \quad M(4 \mid 5 \mid -0{,}5)$



b) $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{n_E} \cdot \overrightarrow{AB} = 3 - 3 = 0 \quad \overrightarrow{n_E} \cdot \overrightarrow{AD} = 9 + 3 - 12 = 0$

A in E : $-2 + 5 + 8 + 7 = 18 \neq 0$

Also ist E echt parallel zu ABCD.

c) Gerade AD : $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Schnitt mit der x_1x_2-Ebene : $x_3 = -2 + 3\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2}{3} \qquad G\left(4 \mid 7 \mid 0\right)$

Gerade BC : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Schnitt mit der x_1x_2-Ebene : $x_3 = -2 + 3\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{2}{3} \qquad H\left(7 \mid 4 \mid 0\right)$

d) G bzw. H teilen $\left[AD\right]$ bzw. $\left[BC\right]$ im Verhältnis 2 : 1. Also wird auch die Parallelogrammfläche in diesem Verhältnis geteilt.

---

2. a) Lot von M auf E : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Schnitt mit E : $4 + \sigma + 5 + \sigma - 4 \cdot (-0{,}5 - 4\sigma) + 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma = -1$

Spitze der Pyramide : $S\left(3 \mid 4 \mid 3{,}5\right)$

b) $\overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{MS} = 3\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \\ 36 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{A}_{ABCD} = \sqrt{(-9)^2 + (-9)^2 + 36^2} = 27\sqrt{2}$

$\Rightarrow \quad \mathfrak{v}_{ABCDS} = \frac{1}{3} \cdot 27\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 54$

---

3. a) $= \vec{s} + 2 \cdot \overrightarrow{SM} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -4{,}5 \end{pmatrix} \quad S'\left(5 \mid 6 \mid -4{,}5\right)$

b) $\overrightarrow{a'} = \overrightarrow{s'} + 2 \cdot \overrightarrow{S'A} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -4{,}5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ $A'\left(-9 \mid 4 \mid 0{,}5\right)$