

Auf dem Gebiet der Gemeinde Windstätt soll ein Windpark zur Stromerzeugung errichtet werden. Die Gegner des Projekts befürchten eine Beeinträchtigung des Fremdenverkehrs und sammeln Unterschriften für ein Bürgerbegehren. Das Windstätter Tagblatt veranstaltet eine Podiumsdiskussion zum Thema Windpark.

1. An der Podiumsdiskussion nehmen neben dem Chefredakteur 5 Gegner und 4 Befürworter des Projekts teil. Die 10 Plätze auf dem Podium sind in einer Reihe nebeneinander angeordnet. Der Chefredakteur setzt sich auf den 5. Platz von links.

Die beiden Gruppen haben jeweils einen Sprecher.

- a) Wie viele verschiedene Sitzordnungen gibt es, bei denen die beiden Sprecher höchstens 2 Plätze vom Chefredakteur entfernt sitzen und sich die übrigen Teilnehmer beliebig auf die restlichen Plätze verteilen?
- b) Bei wie vielen Sitzordnungen, die die Bedingung aus Teilaufgabe 1a erfüllen, nehmen die Gruppen geschlossen links bzw. rechts vom Chefredakteur Platz ?
- c) Zu Beginn der Diskussion werden die Teilnehmer vom Chefredakteur um eine kurze Stellungnahme gebeten. Die Reihenfolge der Redner wird ausgelost.

Mit welcher W'keit befinden sich unter den ersten 6 Rednern genau zwei Gegner des Projekts?

-
2. Im Verlauf der Podiumsdiskussion, zu der 178 Windstätter Bürger erschienen sind, behauptet der Sprecher der Windparkgegner, dass wenigstens 55 % der mehr als 10000 wahlberechtigten Gemeindemitglieder gegen das geplante Projekt sind.

- a) Die Behauptung des Sprechers (Nullhypothese) soll auf dem Signifikanzniveau von 5% getestet werden.

Bestimmen Sie mit Hilfe der Normalverteilung die zugehörige Entscheidungsregel bei einer Befragung von 178 Bürgern.

- b) Um eine Entscheidung im Sinne des Tests aus Teilaufgabe 2.a) zu treffen, sollen die bei der Podiumsdiskussion anwesenden 178 wahlberechtigten Gemeindemitglieder befragt werden. Nehmen Sie zu diesem Vorschlag Stellung.

-
3. Um den Ausgang des beantragten Bürgerentscheids zu prognostizieren, führte das Windstätter Tagblatt eine Umfrage unter 1200 wahlberechtigten Bürgern durch.

Dabei sprachen sich 504 gegen das Projekt aus, während die übrigen 696 für die Errichtung des Windparks waren.

- a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyschow ein möglichst kleines Intervall, in dem der Anteil p der Windparkgegner unter allen Gemeindemitgliedern mit einer W'keit von wenigstens 75 % liegt. Verwenden Sie $p \cdot (1 - p) \leq \frac{1}{4}$.

b) Beim schließlich durchgeführten Bürgerentscheid lag die Wahlbeteiligung bei 35 %.

Es stimmten 51 % gegen das Windparkprojekt; ungültige Stimmen gab es nicht.

Wenn man davon ausgeht, dass die Umfrage die Mehrheitsverhältnisse in Windstätt exakt wiedergibt, kann dieses Ergebnis durch einen unterschiedlichen Mobilisierungsgrad der Gegner und Befürworter erklärt werden.

Welcher Prozentsatz der Gegner und welcher Prozentsatz der Befürworter ist demnach zur Abstimmung gegangen?

4. Ein großes Windparkunternehmen will sich durch Ausgabe von Aktien Kapital an der Börse verschaffen. Die Nachfrage ist erheblich; es werden wesentlich mehr Aktien geordert, als ausgegeben werden sollen. Daher erfolgt die Zuteilung im Losverfahren unter den Anlegern, die mindestens 200 Aktien geordert haben. Es werden nur Aktienpakete zu 50, 100 oder 200 Stück verlost.

Die Zufallsgröße X, die die Anzahl der einem dieser Anleger zugeteilten Aktien beschreibt, hat die folgende Verteilung :

x	0	50	100	200
P(X = x)	0,30	0,40	0,20	0,10

a) Berechnen Sie Erwartungswert und Standardabweichung von X.

b) Es nehmen auch 100 Windstätt Bürger am Losverfahren teil. Nach dem zentralen Grenzwertsatz ist die voraussichtliche Gesamtzahl der ihnen dabei zugeteilten Aktien näherungsweise normalverteilt.

Berechnen Sie unter Annahme der Normalverteilung die W'keit, dass diese Gesamtzahl höchstens 10 % vom Erwartungswert abweicht.

Lösung

a) Es gibt $\binom{4}{2} \cdot 2! \cdot 7! = 60480$ verschiedene Sitzordnungen.

b) Es gibt $2 \cdot 3! \cdot 2 \cdot 4! = 576$ verschiedene Sitzordnungen.

c)
$$P(E) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot 2! \cdot 4! \cdot 3!}{9!} = \frac{5}{42} \approx 11,9\%$$

2. a) Nullhypothese $H_0 : p \geq p_0 = 0,55$

Gegenhypothese $H_1 : p < p_0 = 0,55$

$$\text{Annahmebereich : } \mathbb{A} = \{k+1; \dots; 178\} \quad \text{Ablehnungsbereich : } \bar{\mathbb{A}} = \{0; 1; 2; \dots; k\}$$

$$\text{Bedingung : } P(X \in \bar{\mathbb{A}}) \leq 0,05 \Leftrightarrow P(X \leq k) \leq 0,05$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{k-178 \cdot 0,55+0,5}{\sqrt{178 \cdot 0,55 \cdot 0,45}}\right) \leq 0,05 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{k-178 \cdot 0,55+0,5}{\sqrt{178 \cdot 0,55 \cdot 0,45}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{k-97,4}{\sqrt{43,83}}\right) \leq 0,05 \Leftrightarrow \frac{k-97,4}{\sqrt{43,83}} \leq \Phi^{-1}(0,05) \Rightarrow k \leq 86$$

$$\mathbb{A} = \{87 \dots; 178\} \quad \text{und} \quad \bar{\mathbb{A}} = \{0; \dots; 86\}$$

Die Nullhypothese wird angenommen, wenn mindestens 87 der befragten Bürger gegen den Windpark sind.

b) Keine repräsentative Umfrage !

$$3. a) P\left(\left|p - H_n(X)\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{0,25}{1200 \cdot \varepsilon^2} \geq 0,75 \Rightarrow \varepsilon \geq 0,029$$

$$I = [0,42 - 0,029; 0,61 + 0,029] = [0,391; 0,449]$$

b) Wahrscheinlichkeit, dass ein Bürger gegen die Errichtung des Windparks ist :

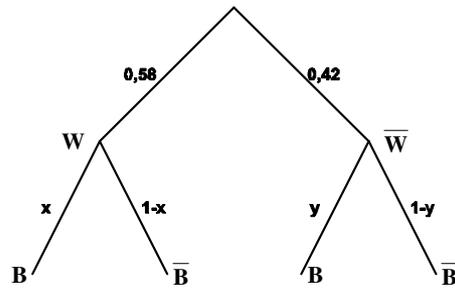
$$\frac{504}{1200} = 0,42$$

Wahrscheinlichkeit, dass ein Bürger gegen die Errichtung des Windparks ist :

$$\frac{696}{1200} = 0,58$$

W : Der Bürger befürwortet den Windpark

B : Der Bürger nimmt am Bürgerentscheid teil



$$(1) 0,58 \cdot x + 0,42 \cdot y = 0,35$$

$$(2) \frac{0,42 \cdot y}{0,35} = 0,51 \Rightarrow y = 0,425$$

$$\text{in (1) } x \approx 0,296$$

$$4. a) E(Z) = 0,4 \cdot 50 + 0,2 \cdot 100 + 0,1 \cdot 200 = 60$$

$$\text{Var}(Z) = 0,4 \cdot 50^2 + 0,2 \cdot 100^2 + 0,1 \cdot 200^2 - 60^2 = 3400 \Rightarrow \sigma(X) = 10\sqrt{34}$$

$$b) E(G) = 100 \cdot 60 = 6000$$

$$\text{Var}(G) = 10 \cdot 10\sqrt{34} = 100\sqrt{34}$$

$$P(5400 \leq G \leq 6600) = \Phi\left(\frac{6600 - 6000 + 0,5}{100\sqrt{34}}\right) - \Phi\left(\frac{5399 - 6000 + 0,5}{100\sqrt{34}}\right) =$$

$$= 2 \cdot \Phi\left(\frac{600,5}{100\sqrt{34}}\right) - 1 \approx 2 \cdot \Phi(1,03) - 1 \approx 68,7\%$$