Stochastik 2004		Aufgabe I

1. Im Mittel wollen 55 % der Anrufer des Callcenters eines großen Touristikunternehmens eine Reise buchen, während 27 % Fragen zu bereits gebuchten Reisen haben.

   Die restlichen Anrufer haben verschiedene andere Anliegen.

   a) Wie groß ist die W'keit dafür, dass unter 25 Anrufern mehr als die Hälfte eine Reise buchen wollen ?

   b)Wie groß ist die W'keit dafür, dass an einem Arbeitstag spätestens der zehnte Anrufer eine Frage zu einer gebuchten Reise hat ?

   c) Am Ende eines Arbeitstags befinden sich noch 12 Anrufer in der Warteschleife der Telefonzentrale, von denen 6 eine Reise buchen wollen und 4 eine Frage zu einer gebuchten Reise haben; die übrigen Anrufer haben eine Reklamation.

   Die Anrufe werden in zufälliger Reihenfolge bearbeitet.

   Wie groß ist die W'keit dafür, dass mindestens eine der Reklamationen unter den letzten 3 bearbeiteten Anrufen ist ?

   d) Wie groß muss der Anteil der Anrufer mit einer Reklamation mindestens sein, damit unter 50 Anrufern mit einer W'keit von mindestens 90 % wenigstens einer eine Reklamation hat ?

---

2. Der Vorstand des Touristikunternehmens beabsichtigt, eine Buchungsmöglichkeit über das Internet einzurichten. Die Geschäftsführung vertritt jedoch die Meinung, dass sich diese Investition nicht lohnt. Um zu testen, ob die Vermutung der Geschäftsführung zutrifft, werden 500 zufällig ausgewählte Kunden bei der Buchung einer Reise befragt.

   Bestimmen Sie mit Hilfe der Normalverteilung die Entscheidungsregel für die Nullhypothese

   H_0 : Mindestens 65 % der Kunden ziehen die herkömmlichen Buchungsmöglichkeiten einer Buchung über das Internet vor

   auf dem Signifikanzniveau von 5 %.

---

3. In einem Urlaubsland werden erste Fälle einer gefährlichen Infektionskrankheit festgestellt, während sich ein Flugzeug mit 120 Reisenden von dort auf dem Heimflug befindet.

   Es wird angenommen, dass sich die Passagiere unabhängig voneinander mit der gleichen W'keit p mit dem Erreger der Krankheit infiziert haben.

   (Eine gegenseitige Ansteckung während des Flugs wird ausgeschlossen.)

   a) Berechnen Sie mit Mitteln der Differentialrechnung, welchen Wert die W'keit dafür, dass von den 120 Reisenden genau 3 infiziert sind, maximal annehmen kann.

Seit kurzem steht ein Bluttest zur Verfügung, mit dem der Erreger bereits vor Ausbruch der Krankheit sicher erkannt werden kann. Da dieser Test sehr kostspielig ist, werden die Reisenden nach ihrer Rückkehr in Gruppen von je 6 Personen eingeteilt.

Dann wird zunächst jeweils ein Gemisch aus dem Blut der Personen einer Gruppe hergestellt; anschließend werden diese Gemische untersucht. Nur bei denjenigen Gruppen, bei denen der Erreger gefunden wird, wird anschließend das Blut jeder Einzelperson getestet.

Im Folgenden soll der Erwartungswert für die Anzahl der benötigten Bluttests exemplarisch für den Fall berechnet werden, dass genau 3 der Reisenden in dem Flugzeug infiziert sind.

b) Die Zufallsgröße X bezeichne die Anzahl der Gruppen, bei denen der Erreger bei der Untersuchung der Blutgemische gefunden wird. Sie hat folgende Verteilung:

x	1	2	3
$P(X = x)$	0,0014		0,8768

Weisen Sie nach, dass die beiden angegebenen (gerundeten) W'keiten richtig sind, und berechnen Sie den dritten Wert.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert für die Gesamtzahl der benötigten Bluttests.

Lösung

==

1. a) $P\left(X \geq 13\right) = 1 - P\left(X \leq 13\right) = 1 - F_{0,55}^{25}\left(12\right) = 1 - 0,30632 \approx 69,4\%$

b) $P\left(E\right) = 1 - P\left(\overline{E}\right) = 1 - 0,73^{10} \approx 95,7\%$

c) $P\left(E\right) = 1 - P\left(\overline{E}\right) = 1 - \frac{\frac{9!}{7!\cdot 2!}}{\frac{12!}{10!\cdot 2!}} = 1 - \frac{36}{66} = \frac{5}{11}$

d) $P(X \geq 1) \geq 0,9 \quad \Leftrightarrow \quad P(X = 0) \leq 0,1 \quad \Leftrightarrow \quad (1 - p)^{50} \leq 0,1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - p \leq \sqrt[50]{0,1}$

$\Leftrightarrow \quad p \geq 1 - \sqrt[50]{0,1} \quad \Rightarrow \quad p \geq 0,04501$

---

2. Nullhypothese H_0: $p \geq p_0 = 0,65$

Gegenhypothese $H_1 : p < p_0 = 0,0,65$

Annahmebereich : $\mathbb{A} = \left\{k + 1; ...; 500\right\}$

Ablehnungsbereich : $\overline{\mathbb{A}} = \{0; ....; k\}$

Bedingung : $\alpha = P\left(X \in \overline{\mathbb{A}}\right) \le 0{,}05 \quad \Leftrightarrow \quad P\left(X \le k\right) \le 0{,}05$

Rechnung : $\Phi\left(\frac{k - 500 \cdot 0{,}65 + 0{,}5}{\sqrt{500 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}35}}\right) \le 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad \frac{k - 324{,}5}{\sqrt{113{,}75}} \le \Phi^{-1}(0{,}05) \quad \Rightarrow \quad k \le 306$

Ergebnis : $\mathbb{A} = \{307; ...; 500\}$ und $\overline{\mathbb{A}} = \{0; ....; 306\}$

Man nimmt die Nullhypothese an, wenn mindestens 307 der 500 befragten Kunden eine Buchung über das Internet vorziehen.

---

3. a) $B\left(120; p; 3\right) = \binom{120}{3} \cdot p^3 \cdot (1-p)^{117}$

$$B\left(120; p; 3\right)' = \binom{120}{3} \cdot \left[3p^2 \cdot (1-p)^{117} - 117p^3 \cdot (1-p)^{116}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot (1-p) - 117p = 0$$

$\Rightarrow \quad p = \frac{1}{40}$ mit Vorzeichenwechsel der Ableitung von $+$ nach $-$.

Eingesetzt : $B\left(120; 0{,}025; 3\right) = \binom{120}{3} \cdot 0{,}025^3 \cdot 0{,}975^{117} \approx 22{,}7\%$

Die größte Wahrscheinlichkeit, dass genau 3 Passagiere angesteckt worden sind, ergibt sich für $p = 2{,}5\%$. Sie beträgt dann ca. 22,7%.

b) $P\left(X=1\right) = \dfrac{\binom{20}{1} \cdot \binom{117}{3}}{\binom{120}{6}} \approx 0{,}0014$

$$P\left(X=3\right) = \frac{\binom{20}{3} \cdot 3! \cdot \binom{117}{5} \cdot \binom{112}{5} \cdot \binom{107}{5}}{\binom{120}{6} \cdot \binom{114}{6} \cdot \binom{108}{6}} \approx 0{,}8768$$

$$P\left(X = 2\right) = 1 - P\left(X = 1\right) - P\left(X = 3\right) \approx 0{,}1218$$

c) $E(A) = 26 \cdot 0{,}0014 + 32 \cdot 0{,}1218 + 38 \cdot 0{,}8786 \approx 37{,}3$