1. Gegeben ist die Schar der Funktionen $f_k : x \to \dfrac{x^2}{1-kx^2}$ mit der maximalen Definitionsmenge D_k und $k \in \mathbb{R}$.

   G_k bezeichnet den Graphen von f_k .

   a) Bestimmen Sie für $k < 0$ und $k > 0$ jeweils die Definitionsmenge D_k.

      Untersuchen Sie für $k \neq 0$ das Verhalten von f_k für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.

      Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten an.

   b) Zeigen Sie, dass gilt : $f_k'(x) = \dfrac{2x}{(1-kx^2)^2}$.

      Begründen Sie, dass alle Graphen G_k einen gemeinsamen Tiefpunkt besitzen.

   c) Skizzieren Sie G_{-1}, G_0 und G_1 in ein gemeinsames Koordinatensystem. Zeichnen Sie auch alle vorhandenen Asymptoten ein.

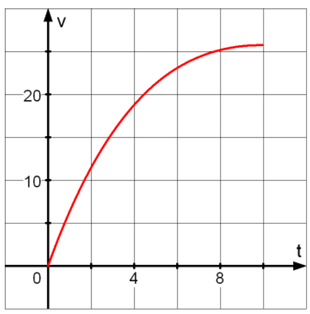
   d) Beschreiben Sie für den Fall $k < 0$, wie sich die Lage der waagrechten Asymptote von G_k für $k \to -\infty$ und $k \to 0$ jeweils verändert.

   e) Bestimmen Sie k zunächst so, dass G_k durch den Punkt $P\left(1 \,\middle|\, 2\right)$ verläuft.

      Zeigen Sie dann, dass durch jeden beliebigen Punkt, der nicht auf einer der Koordinatenachsen liegt, genau ein Graph G_k verläuft.

---

2. Das nebenstehende Diagramm zeigt, wie die Geschwindigkeit eines Fahrzeugs von der Zeit abhängt; der zugehörige Funktionsterm für $0 \leq t \leq 10$ ist $v(t) = 7t \cdot e^{-0,1t}$.

   Dabei bezeichnet v die Maßzahl der in Metern pro Sekunde gemessenen Geschwindigkeit, t die Maßzahl der in Sekunden ge. messenen Zeit.

   Der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen, der t-Achse und der Geraden $t = t_0$ entspricht dem während der ersten t_0 Sekunden zurückgelegten Weg (in Metern).

   a) Berechnen Sie den Weg, den das Fahrzeug in den ersten 10 Sekunden zurücklegt.

   Ab dem Zeitpunkt $t = 10$ wird das Fahrzeug bis zum Stillstand abgebremst. Dabei wird die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Zeit durch eine lineare Funktion beschrieben.

b) Ermitteln Sie die Steigung dieser linearen Funktion, wenn der Bremsweg 122,5 Meter beträgt.

Lösung

==

1. a) Definitionsmenge :

1. Fall $k > 0$: $D_k = \mathbb{R} \setminus \{ -\sqrt{\frac{1}{k}} ; \sqrt{\frac{1}{k}} \}$

2. Fall $k < 0$: $D_k = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f_k(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{1 - kx^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2} - k} = -\frac{1}{k}$$

Asymptoten :

1. Fall $k > 0$: $y = -\frac{1}{k}$, $x = -\sqrt{\frac{1}{k}}$ (Pol) und $x = \sqrt{\frac{1}{k}}$ (Pol)

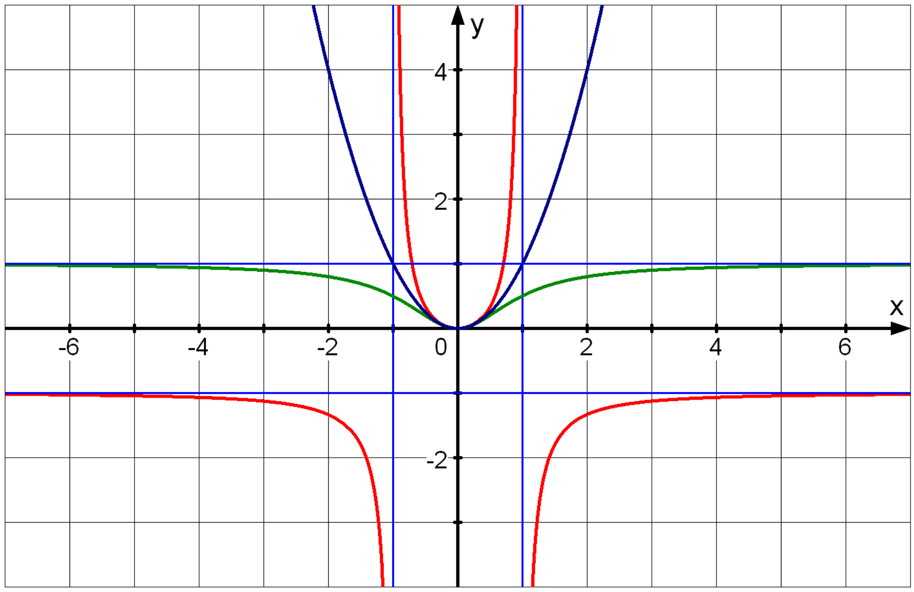
2. Fall $k > 0$: $x = -\sqrt{\frac{1}{k}}$ und $x = \sqrt{\frac{1}{k}}$ (Pole)

b) $f_k'(x) = \dfrac{2x \cdot (1 - kx^2) - x^2 \cdot (-2kx)}{(1 - kx^2)^2} = \dfrac{2x}{(1 - kx^2)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

mit Vorzeichenwechsel der Ableitung von $-$ nach $+$.

$f_k(0) = 0$ d. h. alle Graphen G_k besitzen den Ursprung als Tiefpunkt.

c)



d) $k \to -\infty$: Die waagrechte Asymptote geht von oben gegen die x-Achse.

$k \to 0-0$: Die waagrechte Asymptote geht ins Unendliche.

e) $2 = \frac{1}{1-k} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{2}$

Sei $P(a;\, b)$ mit $a, b \neq 0$ gegeben. Dann $b = \frac{a^2}{1-ka^2} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{b-a^2}{a^2 b}$

---

2. a) Unbestimmtes Integral :

$$\int 7t \cdot e^{-0,1t} dt = -70t \cdot e^{-0,1t} - \int 70 \cdot e^{-0,1t} dt = -70t \cdot e^{-0,1t} - 700 \cdot e^{-0,1t} + C$$

Bestimmtes Integral :

$$\int_0^{10} 7t \cdot e^{-0,1t} dt = \left[-70t \cdot e^{-0,1t} - 700 \cdot e^{-0,1t}\right]_0^{10} = \left(-\frac{700}{e} - \frac{700}{e}\right) - \left(-700\right) \approx 185 \text{ (m)}$$

b) $v(10) = 70 \cdot e^{-1} = \frac{70}{e}$

$\frac{1}{2} \cdot 70 \cdot e^{-1} \cdot \Delta t = 122,5 \quad \Rightarrow \quad \Delta t \approx 9,5 \quad m \approx -\frac{70 \cdot e^{-1}}{9,5} \approx -2,7$
