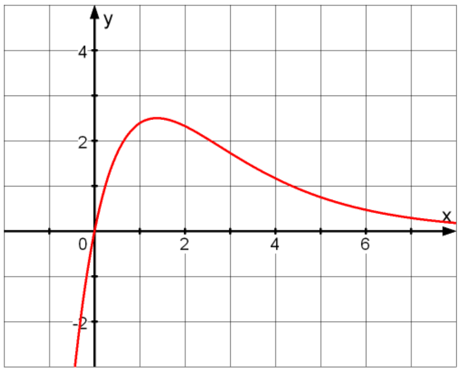
Abitur 2004		Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die in IR definierte Funktion f



mit $f(x) = 10\left(e^{-\frac{x}{2}} - e^{-x}\right)$.

Der zugehörige Graph ist nebenstehend skizziert.

1. Untersuchen Sie durch Rechnung

   a) das Verhalten von f_k für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$.

   b) in welchen Intervallen die Funktionswerte von f positiv bzw. negativ sind.

   c) Lage und Art des Extrempunkts des Graphen von f.

---

2. Einem Patienten wird zum Zeitpunkt $x = 0$ eine bestimmte Menge eines Medikaments verabreicht. Der obige Term f(x) beschreibt die Konzentration dieses Medikaments (Anzahl der Milliliter pro Liter Blut) nach x Stunden.

   Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Konzentration auf 75 % ihres Höchstwerts abgesunken ist.

---

3. Nun werden die in IR definierten Integralfunktionen $F_a : x \to \int_a^x f(t)dt$ betrachtet ($a \in \mathbb{R}$).

   Der Graph von F_a wird mit G_a bezeichnet.

   a) Bestimmen Sie das Monotonie- und das Krümmungsverhalten von G_a ohne Ausführung der Integration (kurze Begründung).

   b) Bestimmen Sie eine integralfreie Darstellung von $F_0(x)$ und zeigen Sie, dass gilt :

   $$\lim_{x \to \infty} F_0(x) = 10$$

   Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunkts von G_0. Skizzieren Sie G_0 unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse.

   c) Erklären Sie, warum jede Funktion F_a mit $a > 0$ genau zwei Nullstellen hat (explizite Berechnung der Nullstellen nicht verlangt).

   Erläutern Sie, warum es Funktionen F_a mit $a < 0$ gibt, die genau eine Nullstelle haben.

Lösung

==

1. a) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} 10\cdot(e^{-\frac{x}{2}} - e^{-x}) = 0$

weil $\lim\limits_{x \to \infty} e^{-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$ **bzw.** $\lim\limits_{x \to \infty} e^{-\frac{x}{2}} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{x}{2}} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 10\cdot(e^{-\frac{x}{2}} - e^{-x}) = \lim\limits_{x \to -\infty} 10\cdot e^{-x}\cdot(e^{\frac{x}{2}} - 1) = -\infty$

weil $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x \to \infty} e^{x} = \infty$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{\frac{x}{2}} - 1) = -1$

b) Nullstelle : $10\cdot(e^{-\frac{x}{2}} - e^{-x}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 10e^{-x}\cdot(e^{\frac{x}{2}} - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\frac{x}{2}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

Als stetige Funktion kann f das Vorzeichen nur an einer Nullstelle wechseln.

Es ist $f(x) < 0, x \in \mathbb{R}^-$, und $f(x) > 0, x \in \mathbb{R}^+$.

c) $f'(x) = 10\cdot(-\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{x}{2}} + e^{-x}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5e^{-x}\cdot(-e^{\frac{x}{2}} + 2) = 0$

$\Leftrightarrow \quad e^{\frac{x}{2}} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2\ln 2 \quad E\left(2\ln 2; \frac{5}{2}\right)$

$f''(x) = 10\cdot(\frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{x}{2}} - e^{-x}) \quad \Rightarrow \quad f''(2\ln 2) = -\frac{5}{4} < 0$

E ist ein Hochpunkt des Graphen.

---

2. Bedingung : $10\cdot(e^{-\frac{x}{2}} - e^{-x}) = \frac{3}{4}\cdot 2{,}5 = \frac{15}{8} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-x} - e^{-\frac{x}{2}} + \frac{3}{16} = 0$

Substitution : $u := e^{-\frac{x}{2}}$

$u^2 - u + \frac{3}{16} = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{4} \vee \langle u = \frac{3}{4} \rangle$

Resubstitution : $e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad x = -2\ln\frac{1}{4} = 4\ln 2 \approx 2{,}8$ (h)

Nach ca. 2,8 h ist die Konzentration auf 75 % ihres Höchstwerts abgesunken.

---

3. a) Nach dem DHI (**H**auptsatz der **D**ifferential- und **I**ntegralrechnung) ist F_a auf

$]-\infty; 0]$ streng monoton abnehmend und auf $[0; \infty[$ streng monoton zunehmend.

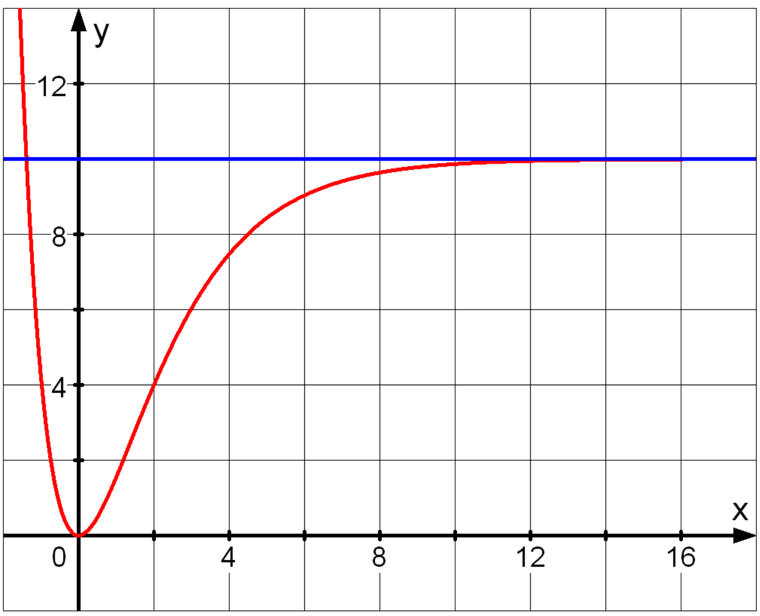
Auf $]-\infty; 2\ln 2]$ ist F_a linksgekrümmt (**konvex**) und auf $[2\ln 2; \infty[$ rechtsgekrümmt (**konkav**).

b) $$\int_0^x 10\cdot\left(e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}\right)dt = \left[10\cdot\left(-2\cdot e^{-\frac{t}{2}} + e^{-t}\right)\right]_0^x = -20e^{-\frac{x}{2}} + 10e^{-x} + 10$$

Daraus ergibt sich unmittelbar $\lim\limits_{x \to \infty} F_0(x) = 10$

Die Abszisse des Wendepunkts von F_0 ist die Abszisse des Hochpunktes von f.

$F_0(2\ln 2) = 2{,}5 \quad W\left(2\ln 2; 2{,}5\right)$



c) Es ist $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt = \int_a^0 f(t)dt + \int_0^x f(t)dt = F_0(x) + C$ mit

$$C = \int_a^0 f(t)dt = -\int_0^a f(t)dt = -F_0(a)$$

Für $a > 0$ ist $-10 < C < 0$. Daher besitzt F_a für $a > 0$ zwei Nullstellen.

Es gibt $a < 0$ mit $C < -10$. Dann besitzt F_a nur eine Nullstelle.
