Abitur 2003		Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_k : x \to \frac{1}{2}(k-x)\sqrt{e^x}$ mit $k \in \mathbb{R}$:
Der jeweilige Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

a) Geben Sie $f_k(0)$ sowie die Nullstelle von f_k an.

Untersuchen Sie das Verhalten von f_k für $x \to -\infty$ und für $x \to \infty$.

b) Zeigen Sie, dass $f_k'(x) = \frac{1}{2} \cdot f_{k-2}(x)$ gilt,

und ermitteln Sie hiermit Funktionsterme der Ableitungen f_k'' und f_k'''' sowie einer Stammfunktion von f_k.

c) Zeigen Sie, dass G_k genau einen Hochpunkt und genau einen Wendepunkt besitzt, und bestimmen Sie die Koordinaten dieser Punkte.

d) Zeichnen Sie unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse G_4 und G_6 in ein gemeinsames Koordinatensystem ein.

e) G_4 schließt im zweiten Quadranten mit den Koordinatenachsen ein sich ins Unendliche erstreckendes Flächenstück ein. Begründen Sie, dass dieses einen endlichen Inhalt hat.

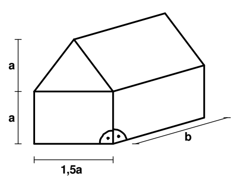
f) Geben Sie an, welche Bedeutung die Funktion $2 \cdot f(6)$ für die Funktion f_4 hat.

Bestimmen Sie mit Hilfe von G_6 aus Ihrer Zeichnung die positive Zahl z (auf eine Dezimale genau), für die $\int_0^z f(x)dx = 0$ ist.

Tragen Sie dazu entsprechende Hilfslinien in die Zeichnung ein und erläutern Sie Ihr Vorgehen. Überprüfen Sie Ihre graphisch gewonnene Näherungslösung, indem Sie z mit Hilfe des Taschenrechners auf eine Dezimale genau ermitteln.

---

2. Das abgebildete Zelt - geometrisch betrachtet ein gerades Prisma - hat einen rechteckigen Grundriss mit den Seitenlängen $\frac{3}{2}a$ und b.



Die Front besteht aus einem Rechteck mit den Seitenlängen $\frac{3}{2}a$ und a sowie einem aufgesetzten gleichschenkligen Dreieck der Höhe a.

a) Zeigen Sie, dass für den Rauminhalt V des Zelts und für den Flächeninhalt S der benötigten Zeltplane (ohne Boden und Laschen, das Zelt ist vollständig geschlossen) gilt :

$V = \frac{9}{4}a^2b$ und $S = \frac{9}{2}a^2 + \frac{9}{2}ab$

b) Bestimmen Sie a und b so, dass $V = 121{,}5\ m^3$ ist und dass der Materialverbrauch an Zeltplane möglichst gering ist.

Wie viele m^2 Zeltplane werden in diesem Fall benötigt ?

Lösung

===

1. a) Nullstelle : $x = k$

Funktionswert : $f_k(0) = \frac{1}{2}k$

$$\lim_{x \to -\infty} f_k(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2}(k-x)\sqrt{e^x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2}\frac{k-x}{e^{-0,5x}} \overset{H}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{-0{,}5}{-0{,}5e^{-0,5x}} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} f_k(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2}(k-x)\sqrt{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2}(k-x)\cdot e^{\frac{1}{2}x} = -\infty \text{ weil } \lim_{u \to \infty} e^u = \infty$$

b) $$f_k'(x) = \frac{1}{2}\cdot\left[(-1)\cdot e^{0,5x} + (k-x)\cdot\frac{1}{2}e^{0,5x}\right] = \frac{1}{4}\cdot(k-2-x)\cdot e^{0,5x} = \frac{1}{2}\cdot f_{k-2}(x)$$

$$f_k''(x) = \left[f_k'(x)\right]' = \left[\frac{1}{2}\cdot f_{k-2}(x)\right]' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot f_{k-2-2}(x) = \frac{1}{4}\cdot f_{k-4}(x) = \frac{1}{8}\cdot(k-4-x)\cdot e^{0,5}x$$

und analog

$$f_k'''(x) = \frac{1}{8}\cdot f_{k-4}(x) = \frac{1}{16}\cdot(k-6-x)\cdot e^{0,5}x$$

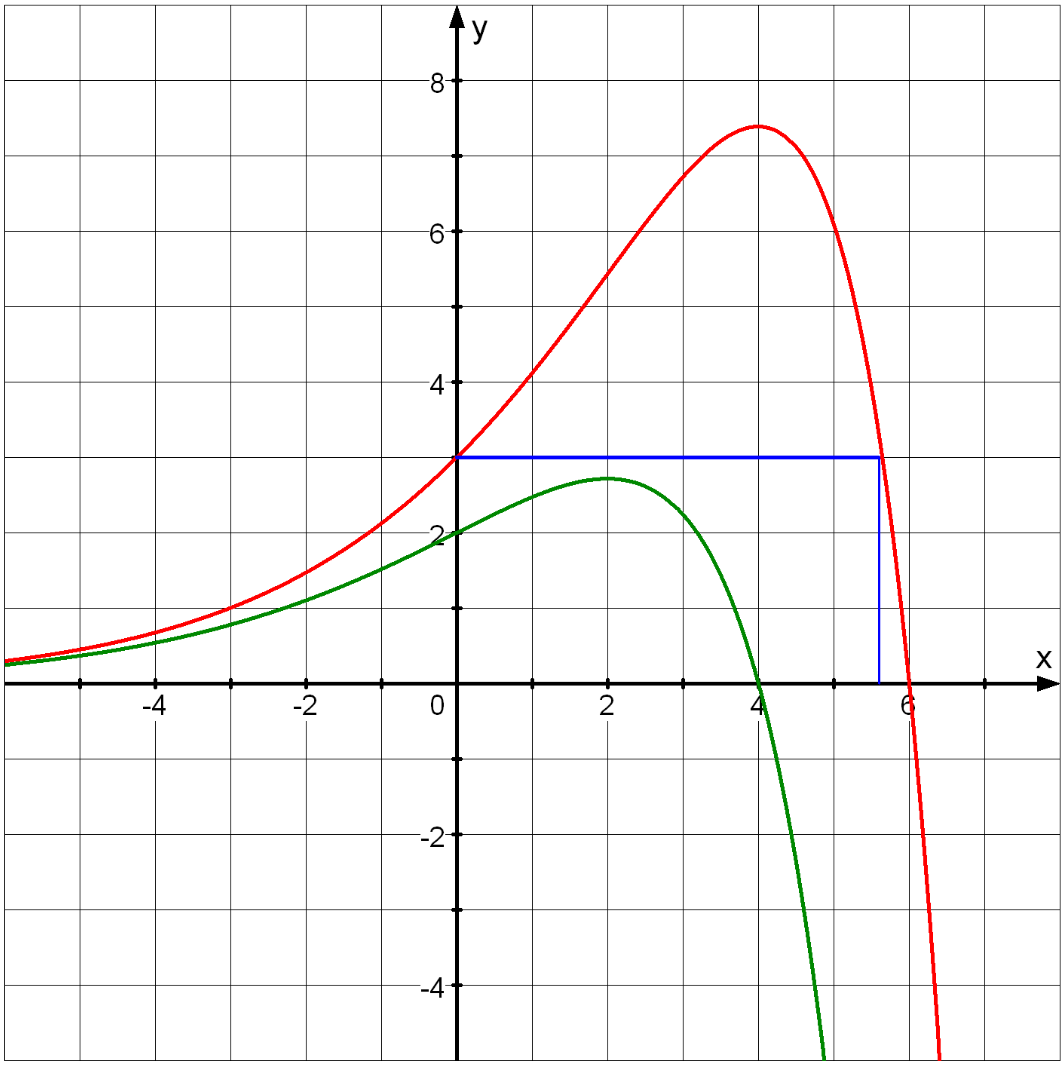
c) Nullstelle der ersten Ableitung $x = k-2$ mit Vorzeichenwechsel von $+ \to -$

(vgl. Grenzverhalten) ergibt Hochpunkt $H\left(k-2; \sqrt{e^{k-2}}\right)$

Nullstelle der ersten Ableitung $x = k-4$ mit Vorzeichenwechsel von $+ \to -$

(vgl. Grenzverhalten) ergibt Wendepunkt $W\left(k-4; 2\sqrt{e^{k-4}}\right)$

d)



e) $A(a) = \int_a^0 f_4(x)dx = \left[2\cdot f_6(x)\right]_a^0 = 6 - 2\cdot f_6(a)$

$\lim\limits_{a \to -\infty} A(a) = 6$

f) $2\cdot f_6$ ist eine Stammfunktion von f_4.

Es ist $\int_0^z f_4(x)dx = 2\cdot f_6(z) - 2\cdot f_6(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_6(z) = 3.$

$f_6(5{,}6) \approx 3{,}3 \quad f_6(2{,}7) \approx 2{,}6$

----

2. a) $V = \left(\frac{3}{2}a\cdot a + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}a\cdot a\right)\cdot b = \frac{9}{4}a^2b$

$S = 2\cdot\frac{9}{4}a^2 + (a + a + \frac{5}{5} + \frac{5}{4}a)\cdot b = \frac{9}{2}a^2 + \frac{9}{2}ab$

b) $b = \frac{4V_0}{a^2}$

$S = \frac{9}{2}a^2 + \frac{9}{2}\cdot a\cdot\frac{4V_0}{9a^2} = \frac{9}{2}a^2 + \frac{2V_0}{a}$

$\frac{dS}{da} = 9a - \frac{2V_0}{a^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[3]{\frac{2\cdot 121,5}{9}}\ m = 3\ m$

$\Rightarrow \quad b = 6\ m$

$S = 121,5\ m^2$
