Abitur 2003		Infinitesimalrechnung I

1. a) Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen

$$g : x \to \frac{e^x}{2},\; g^* : x \to \frac{e^{-x}}{2} \text{ und } f_1 : x \to \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Zeichnen Sie mit Hilfe der Funktionswerte $g(-1)$, $g(1)$ und $g(2)$ den Graphen von g im Bereich $-2 \le x \le 2$ in ein Koordinatensystem mit der Längeneinheit 2 cm.

Erläutern Sie, wie der Graph von g^* aus dem Graphen von g und schließlich der Graph von f_1 aus den Graphen von g und g^* entsteht.

Zeichnen Sie die Graphen von g^* und f_1 in das vorhandene Koordinatensystem.

Die Funktion f_1 gehört der Funktionenschar $f_k : x \to \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2k}$ mit $D = \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}^+$ an. Der Graph von von f_k wird mit G_k bezeichnet.

b) Welches Symmetrieverhalten weist G_k auf ? Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von f_k. und geben Sie die Koordinaten des Extrempunktes an.

c) Nun wird die Integralfunktion $F_k : x \to \int_0^x f_k(t)dt$ mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R}$ betrachtet. Bestimmen Sie ohne Berechnung der integralfreien Darstellung von F_k das Symmetrie-, Monotonie- und Krümmungsverhalten des Graphen von F_k (kurze Begründung).

d) Ermitteln Sie eine integralfreie Darstellung von $F_1(x)$ und zeigen Sie die Gültigkeit der Beziehung $\left[f_1(x)\right]^2 = 1 + \left[F_1(x)\right]^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Konstruieren Sie mittels dieser Beziehung den Wert J des Integrals $\int_0^2 f_1(x)dx$ als Streckenlänge in Ihrer Zeichnung und markieren Sie die zugehörige Strecke farbig.

---

2. a) Ermitteln Sie die beiden Stellen x_1 und x_2, an denen die Funktion f_1 den Wert m $(m > 1)$ annimmt.

$$\left[\text{Ergebnis} : x_{1/2} = \ln\left(m \pm \sqrt{m^2 - 1}\right)\right]$$

b) Lässt man das im 1. Quadranten liegende, von G_1, der positiven y-Achse und der Geraden mit der Gleichung $y = 10$ begrenzte Flächenstück um die y-Achse rotieren, entsteht ein kelchförmiger Körper.

Berechnen Sie dessen Durchmesser d am oberen Rand. Geben Sie einen Ansatz für das Volumen V des Kelches an (Berechnung ist nicht verlangt)

3.

Die Spannweite am Boden (Außenmaße) und die Höhe des 1965 in St. Louis, Missouri, errichteten Gateway Arch betragen jeweils 631 feet. Das Foto zeigt eine Schrägansicht des Bogens. In einem Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 foot kann die äußere Begrenzung des Bogens durch einen umgedrehten Graphen G_k angenähert werden.

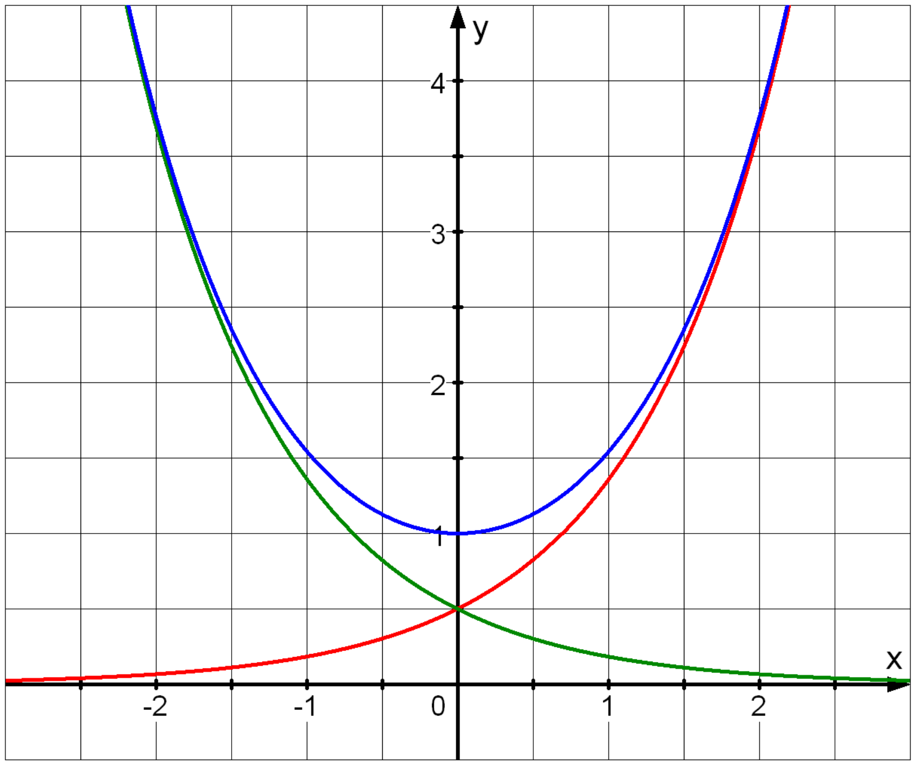
Erstellen Sie einen Ansatz zur Berechnung von k und zeigen Sie, dass der Wert $k = 2^{-7}$ eine gute Näherungslösung ist.

Lösung

1. a) $g(-1) = \frac{e^{-1}}{2} = \frac{1}{2e} \approx 0{,}2 \quad g(1) = \frac{e^1}{2} = \frac{e}{2} \approx 1{,}4 \quad g(2) = \frac{e^2}{2} \approx 3{,}7$

Den Graphen von g^* erhält man, wenn man den Graphen von g an der y-Achse spiegelt.

Die Ordinaten der Punkte auf dem Graphen von f_1 erhält man, wenn man die Ordinaten der Punkte auf den Graphen von g und g^* mit der gleichen Abszisse addiert.



b) $f_k(-x) = \dfrac{e^{-kx} + e^{kx}}{2} = f_k(x)$

G_k ist symmetrisch zur y-Achse.

$f_k'(x) = \dfrac{k \cdot e^{kx} - k \cdot e^{-kx}}{2k} = \dfrac{1}{2} \cdot (e^{kx} - e^{-kx})$

$f_k'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{kx} - e^{-kx} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} - 1 > 0$

$\Leftrightarrow \quad e^{2x} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2kx > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0$

$f_k'(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{kx} - e^{-kx} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} - 1 < 0$

$\Leftrightarrow \quad e^{2x} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2kx < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 0$

f_k nimmt für $x < 0$ streng monoton ab und für $x > 0$ streng monoton zu.

$E\left(0; \dfrac{1}{k}\right)$ ist also ein Tiefpunkt.

c) Der Graph von F_k ist punktsymmetrisch zum Punkt $O\left(0; 0\right)$ weil G_k achsensymmetrisch und $F_k(0) = 0$ ist.

Der Graph von F_k ist streng monoton steigend, weil $F_k'(x) = f_k(x) > 0$ ist.

Der Graph von F_k ist für $x > 0$ rechtsgekrümmt (**konkav**), weil f_k für $x < 0$ streng monoton abnimmt und für $x < 0$ linksgekrümmt (**konvex**), weil f_k für $x > 0$ streng monton zunimmt.

d) $\int f_1(t)dx = \int \frac{e^t + e^{-t}}{2} dx = \frac{e^t - e^{-t}}{2} + C$

$$F_1(x) = \left[\frac{e^t - e^{-t}}{2} \right]_0^x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\left[f_1(x)\right]^2 - 1 = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - 1 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - 4}{4} = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} =$$

$$= \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} = \left[F_1(x)\right]^2$$

$$1 + \left[F_1(2)\right]^2 = \left[f_1(2)\right]^2$$

Man konstruiert ein rechtwinkliges Dreieck mit einer Hypotenuse der Länge $f_1(2)$ und einer Kathete der Länge 1.

Die Länge der zweiten Kathete ist dann der Wert von $J = F_1(2) = \int_0^2 f_1(x)dx$.

---

2. a) $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = m \iff e^x + e^{-x} = 2m \iff e^{2x} - 2me^x + 1 = 0$

Substitution : $u = e^x$

$u^2 - 2mu + 1 = 0$

Diskriminante : $D = 4m^2 - 4$

$$u = \frac{2m - \sqrt{4m^2 - 4}}{2} = m - \sqrt{m^2 - 1} \lor u = m + \sqrt{m^2 - 1}$$

Resubstitution :

$e^x = m - \sqrt{m^2 - 1} \lor e^x = m + \sqrt{m^2 - 1} \Rightarrow$

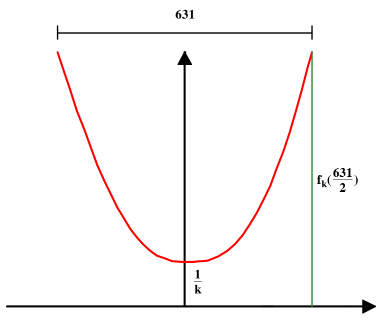
$$x = \ln(m - \sqrt{m^2 - 1}) \vee x = \ln(m + \sqrt{m^2 - 1}$$

b) $d = 2 \cdot \ln(10 + \sqrt{99})$

$$V = \pi \cdot \int_{1}^{10+\sqrt{99}} [\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})]^2 dx$$

---

3. Ansatz : $\dfrac{e^{\frac{631}{2}k} + e^{-\frac{631}{2}k}}{2k} = \dfrac{1}{k} + 631$



Einsetzen ergibt

Linke Seite : 758,19

Rechte Seite : 759
