In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $O(0\,|\,0\,|\,0)$, $A(6\,|\,0\,|\,0)$

$B(6\,|\,6\,|\,6)$

die Ebene

$F: x_1 - x_2 = 0$ und die Ebenenschar $G_k: kx_1 + 6x_2 - 6k = 0$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ gegeben.

1. a) Bestimmen Sie in Normalenform eine Gleichung der Ebene E, die die Punkte A, B und O enthält. Weisen Sie nach, dass das Dreieck OAB bei A rechtwinklig ist.

b) Alle Punkte des Dreiecks OAB, für die A der nächstgelegene Eckpunkt ist, werden grün gekennzeichnet. Welcher Bruchteil der Dreiecksfläche ist dann grün gefärbt ?

Begründen Sie Ihre Antwort anhand einer Skizze.

c) Durch die Spiegelung der Ebene E aus Teilaufgabe l. a) an der Ebene F erhält man die Ebene $E^*$. Begründen Sie, dass B und O Fixpunkte dieser Spiegelung sind.

Ermitteln Sie für $E^*$ eine Gleichung in Normalenform.

d) Geben Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s der Ebenen E und $E^*$ sowie den Schnittwinkel $\varphi$ von E und $E^*$ an.

---

2. a) Bestimmen Sie - soweit vorhanden - die Koordinaten der Schnittpunkte der Scharebenen $G_k$ mit den Koordinatenachsen.

Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat jede Scharebene $G_k$ ?

b) Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass alle Scharebenen $G_k$ eine gemeinsame Schnittgerade g haben, und geben Sie eine Gleichung von g an.

---

3. Für jedes $k > 0$ begrenzen die Ebenen E, $E^*$, $G_k$ und die $x_1x_2$ - Ebene eine dreiseitige Pyramide $P_k$.

a) Geben Sie die Koordinaten der vier Eckpunkte von $P_k$ an und berechnen Sie das Pyramidenvolumen $V_k$ in Abhängigkeit von k.

b) Für welches k ist F Symmetrieebene von $P_k$ ? Geben Sie eine kurze Begründung.

**Lösung**

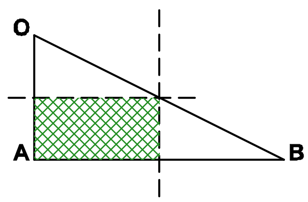
==============================================================

1\. a) Normalenvektor : $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 36 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 36 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ebene E : $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 - x_3 = 0$

$\overrightarrow{AO} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad \Rightarrow \quad \measuredangle OAB = 90°$

b) 50% der Dreiecksfläche sind grün eingefärbt.




c) O und B liegen auf F, sind als Fixpunkte.

Lotgerade zu F durch A : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Eingesetzt in F : $6 + \mu + \mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = -3$

$\Rightarrow \quad \vec{a'} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OA'} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 36 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bildebene $E^*$ : $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x_1 + x_3 = 0$

d) Schnittgerade ist OB : $\vec{x} = \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = \left| \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \right| = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 60°$$

---

2. a) Schnittpunkt mit der $x_1$-Achse : $x_2 = x_3 = 0$

$kx_1 - 6k = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 6 \quad S_{x_1}(6 \mid 0 \mid 0)$

Schnittpunkt mit der $x_2$-Achse : $x_1 = x_3 = 0$

$6x_2 - 6k = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = k \quad S_{x_2}(0 \mid k \mid 0)$

Jede Ebene der Schar ist parallel zur $x_3$-Achse.

b) Alle Ebenen der Schar haben den Punkt $A(6 \mid 0 \mid 0)$ gemeinsam und damit eine ganze Gerade.

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

---

3. a) $E : x_2 - x_3 = 0 \quad E^*: -x_1 + x_3 = 0 \quad G_k : kx_1 + 6x_2 - 6k = 0$

Die gemeinsamen Schnittpunkt je zwei dieser Ebenen mit der $x_1x_2$-Ebene ilden einen

Eckpunkt der Pyramide : $P_1(0 \mid 0 \mid 0)$, $P_2(6 \mid 0 \mid 0)$, $P(30 \mid k \mid 0)$

Der gemeinsame Schnittpunkt von E, $E^*$ und $G_k$ ergibt sich durch Schniit von g mit $G_k$.

$$\vec{x} = \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ in } G_k : G_k : k\sigma + 6\sigma - 6k = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{6k}{k+6}$$

Dies ergibt $P_4\left(\frac{6k}{k+6} \mid \frac{6k}{k+6} \mid \frac{6k}{k+6}\right)$

$$\mathfrak{V}_P = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot k \cdot \frac{6k}{k+6} = \frac{6k^2}{k+6}$$

b) F halbiert den ersten Oktanten und geht durch $P_4$. Als muss das Dreieck $P_1P_2P_3$ gleichschenklig sein. Dies ist nur für $k = 6$ möglich.

---