1. In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $A\left(4 \mid -1 \mid 1\right)$, $B\left(0 \mid 3 \mid 1\right)$ und $D\left(2 \mid -1 \mid 3\right)$ gegeben.

   a) Durch einen weiteren Punkt C wird das Dreieck ABD zu einem achsensymmetrischen Trapez ABCD ergänzt. $\left[AB\right]$ ist dabei die längere der beiden parallelen Seiten.

   Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes C und zeigen Sie, dass die beiden parallelen Seiten dieses Trapezes den Abstand $\sqrt{6}$ haben.

   b) Das Trapez ABCD ist die Grundfläche einer Pyramide, deren Spitze der Ursprung O ist. Berechnen Sie das Volumen V dieser Pyramide.

   c) Zeigen Sie, dass der Mittelpunkt M von $\left[AB\right]$] zugleich Umkreismittelpunkt des Trapezes ist.

   d) Beschreiben Sie in Worten, wie der Umkugelmittelpunkt der Pyramide von Teilau gabe 1. b) bestimmt werden kann. Führen Sie die Rechnung nicht durch.

   e) Untersuchen Sie, ob die x_3-Achse die Trapezfläche trifft.

---

2. Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem für

$$\begin{array}{lrcl}
\text{(I)} & 3x_1 - dx_2 & = & -2d \\
\text{(II)} & (1001-a)x_2 - 5x_3 & = & -10 \\
\text{(III)} & (1001+a)x_3 & = & 4004
\end{array}$$

   a) Zeigen Sie, dass das System bei gegebenem $d \in \mathbb{R}$ für alle $a \in \mathbb{R}$, $\left|a\right| \neq 1001$, eindeutig lösbar ist.

   b) In welchem der Fälle $\left|a\right| = 1001$ hat das System mehr als eine Lösung ?

   Geben Sie für diesen Fall (bei gegebenem d) eine geometrische Deutung.

   c) Bestimmen Sie a und d so, dass $\left(x_1 \middle| x_2 \middle| x_3\right) = \left(15 \middle| 5 \middle| 2002\right)$ Lösung des Gleichungssystems ist.

Lösung

==

1\. a) Mittelpunkt von $\left[AB\right]$: $M\left(2 \,|\, 1 \,|\, 1\right)$

Verbindungsvektor : $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Symmetrieebene E des Trapezes : $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x_1 + x_2 + 1 = 0$

Lotgerade g zu E durch D : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

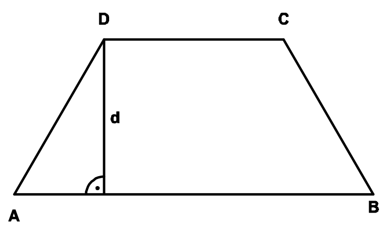
Schnitt von g mit E : $-(2-\lambda) + (-1+\lambda) + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1$

$\Rightarrow \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad C\left(0 \,|\, 1 \,|\, 3\right)$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = 4\sqrt{2} \quad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{DC} = 2\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{AD} = 2\sqrt{2}$

$\overline{AD}^2 = \left(\dfrac{\overline{AB} - \overline{DC}}{2} \right)^2 + d^2 \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{8-2} = \sqrt{6}$



b) Normalenvektor der Ebene T, in der das Trapez liegt : $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Normalenform von T} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0$$

$$d(O;\, T) = \left| \frac{0+0+0-4}{\sqrt{3}} \right| = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\mathfrak{V} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = 4$$

c) $\overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{MC} = 2\sqrt{2} = \overline{MD} = \overline{MA} = \overline{MB}$

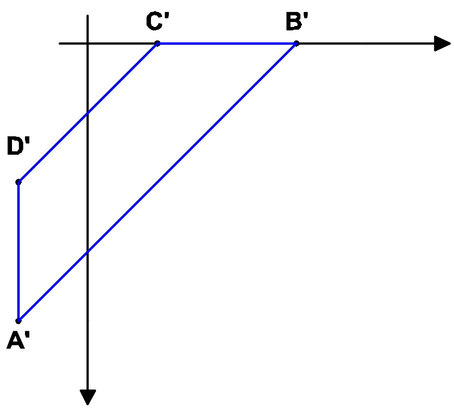
d) Der Mittelpunkt der Umkugel liegt

i) dem Lot durch M zu T

ii) der Ebene senkrecht zu AO durch den Mittelpunkt von $[AO]$.

e) Projektion des Trapezes in die x_1x_2-Ebene

$A'(4 \mid -1 \mid 0)$, $B'(0 \mid 3 \mid 0)$, $C'(0 \mid 1 \mid 0)$ und $D'(2 \mid -1 \mid 0)$



Die x_3-Achse trifft das Trapez nicht.

---

2. a) $\begin{vmatrix} 3 & -d & 0 \\ 0 & 1001-a & -5 \\ 0 & 0 & 1001+a \end{vmatrix} = 3\cdot(1001-a)\cdot(1001+a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -1001 \ \vee \ a = 1001$

$\Rightarrow$ Für $|a| \neq 1001$ ist das System eindeutig lösbar.

b) Sei $a = -1001$

$$\begin{array}{l|rcl} \text{(I)} & 3x_1 - dx_2 & = & -2d \\ \text{(II)} & 2002x_2 - 5x_3 & = & -10 \\ \text{(III))} & 0 & = & 4004 \end{array}$$

Für $a = -1001$ ist das System unlösbar.

Sei $a = 1001$

$$\begin{array}{l|rcl} \text{(I)} & 3x_1 - dx_2 & = & -2d \\ \text{(II)} & -5x_3 & = & -10 \\ \text{(III))} & 2002x_3 & = & 4004 \end{array}$$

(II) $\Leftrightarrow$ (III) $\quad \Rightarrow \quad x_3 = 2$

Parmatrisierung von (I) : $x_2 = \lambda \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{2}{3}d + \frac{1}{3}d\lambda$

Für $a = 1001$ und beliebigen d besitzt das System mehr als eine Lösung.

(I), (II) und (III) lassen sich als Gleichungen von Ebenen deuten.

Die durch (II) und (III) festgelegtenEbenen sind identisch.

Die durch (I) festgelegt Ebene schneidet die durch (II) festgelegte Ebene in einer Geraden.

c) In (III) eingesetzt ergibt sich $(1001+a)\cdot 2002 = 4004 \quad \Rightarrow \quad a = -999$

In (I) eingesetzt ergibt sich $45 - 5d = -2d \quad \Rightarrow \quad d = 15$

In (I) $2000\cdot 5 - 5\cdot 2002 = -10$