Abitur 2002		Stochastik II

Firma Brettlmaier ist ein Holz verarbeitender Betrieb, der Profilbretter und Parkettdielen herstellt.

l. Die Stämme, die zu Profilbrettem geschnitten werden, bezieht die Firma Brettlmaier von einem Händler, der das Holz waggonweise anliefert.

80 % der Waggons enthalten ausschließlich Stämme aus Europa; der Rest der Waggons hat ausschließlich Ware aus nichteuropäischen Ländern geladen.

Unter der Annahme, dass die Waggons unabhängig voneinander und rein zufällig angeliefert werden, berechne man

a) die Anzahl der Waggons, die man mindestens untersuchen muss, um mit einer W'keit von mehr als 90 % wenigstens einen mit nichteuropäischen Stämmen zu finden;

b) die W'keit dafür, in einer Lieferung von 200 Waggons mehr als 150 mit europäischen Stämmen zu finden.

Nach dem Schnitt werden die Profilbretter nach den Qualitätsstufen A und B sortiert. Man erhält aus den europäischen Stämmen 65 % A-Bretter. Insgesamt liegt der Anteil der A-Sortierung bei 58 %.

c) Wie groß ist die W'keit dafür, dass ein beliebig ausgewähltes Brett der B-Sortierung aus nichteuropäischem Holz hergestellt worden ist ?

d) Mit welcher W'keit besitzen fünf aus einer großen Anzahl rein zufällig ausgewählte Bretter alle dieselbe Qualitätsstufe ?

e) Nach längerer Produktionszeit ist der Verdacht aufgekommen, dass sich der Anteil der A-Qualität auf einen Wert $p < 0{,}58$ verringert hat.

Dazu soll die Nullhypothese $p \geq 0{,}58$ mit einem Signifikanztest auf dem Niveau 5 % getestet werden.

Bestimmen Sie mit Hilfe der Normalverteilung als Näherung die Entscheidungsregel für einen solchen Test auf der Basis einer Stichprobe von 300 Brettern.

---

2. Zur Herstellung von Parkettdielen stehen viele, jeweils gleich große Brettchen zur Verfügung, die nach dem Aussehen in drei Kategorien "ruhig", "mittel" und "lebhaft" eingeteiltwerden.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, für eine Diele 15 Brettchen auszuwählen, wenn es nur darauf ankommt, in welcher Stückzahl die drei Kategorien auftreten?

---

3. Die Parkettdielen werden verlegefertig mit hoher Maßgenauigkeit verkauft. Sie weisen eine mittlere Länge von 800,0 mm bei einer Standardabweichung von 0,2 mm auf.

Beim Verlegen in einem Raum werden 10 Parkettdielen nahtlos aneinandergefügt. Die

Gesamtlänge soll möglichst genau 8 m betragen.

Schätzen Sie unter der Annahme, dass die Länge der einzelnen Parkettdielen und die Gesamtlänge aus den zehn Parkettdielen jeweils normalverteilt sind, die W'keit dafür ab, dass höchstens 1,0 mm abgeschliffen werden müssen.

---

4. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße X kann näherungsweise mit Hilfe der kumulativen Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung wie folgt angegeben werden:

$$P(X \le k) \approx \Phi\left(\frac{k-20+0{,}5}{4}\right)]$$

Beschreiben Sie ein konkretes Zufallsexperiment und eine Zufallsgröße X mit der angegebenen Verteilung

---

Lösung :

---

1. a) Bedingung : $P\left(X \ge 1\right) > 0{,}90 \quad \Leftrightarrow \quad P\left(X = 0\right) < 0{,}10 \quad \Leftrightarrow \quad B\left(n;\, 0{,}2;\, 0\right) < 0{,}02$

$$0{,}8^n < 0{,}10 \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}8} \quad \Rightarrow \quad n \ge 11$$

b) $P\left(X > 150\right) = 1 - P\left(X \le 150\right) = 1 - F_{0,8}^{200}(150) = 1 - 0{,}04935 \approx 95{,}1\%$

c) Gegeben : $P(A) = 0{,}58 \quad P\left(A \,\middle|\, E\right) = 0{,}65$ Gesucht : $P\left(\overline{E} \,\middle|\, B\right)$

$$P(B) = P(E) \cdot P\left(B \,\middle|\, E\right) + P(\overline{E}) \cdot \left(B \,\middle|\, \overline{E}\right)$$

Eingesetzt : $0{,}42 = 0{,}8 \cdot 0{,}65 + 0{,}2 \cdot P\left(\;\middle|\;\right) \Rightarrow P(B \mid \overline{E}) = 0{,}5$

$$P(\overline{E} \mid B) = \frac{P(\overline{E} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\overline{E}) \cdot P(B \mid \overline{E})}{P(B)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}5}{O{,}42} =$$

d) $P(D) = 0{,}58^5 + 0{,}42^5 \approx$

e) Nullhypothese : $p \ge p_0 = 0{,}58$

Gegenhypothese : $p < p_0 = 0{,}58$

Annahmebereich : $\mathbb{A} = \left\{ k+1; ...; 300 \right\}$ Ablehnungsbereich : $\overline{\mathbb{A}} = \left\{ 0; ....; k \right\}$

Bedingung : $\alpha = P\left(X \in \overline{\mathbb{A}} \right) \le 0{,}05 \quad \Leftrightarrow \quad P\left(X \le k \right) \le 0{,}05$

$$\Phi\left(\frac{k - 300 \cdot 0{,}58 + 0{,}5}{\sqrt{300 \cdot 0{,}58 \cdot 0{,}42}} \right) \le 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad \frac{k - 173{,}5}{\sqrt{73{,}08}} \le \Phi^{-1}\left(0{,}05\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{k - 173{,}5}{\sqrt{73{,}08}} \le -1{,}6449 \quad \Rightarrow \quad k \le 159$$

Also ist $\mathbb{A} = \left\{ 160; ...; 300 \right\}$ und $\overline{\mathbb{A}} = \left\{ 0; ....; 159 \right\}$

---

2. Es gibt $\frac{(15+2)!}{15! \cdot 2!} = 136$ verschiedene Möglichkeiten.

---

3. X_i : Länge des i.ten Bretts ($1 \le i \le 10$)

$E(X_i) = 800{,}0$ mm $\quad \sigma(X_i) = 0{,}2$ mm $\quad \Rightarrow \quad Var(X_i) = 0{,}04$ mm^2

$X = X_1 + X_2 + ... + X_{10} \quad E(X) = 10 \cdot 800{,}0$ mm $= 8000{,}0$ mm

$Var(X) = 10 \cdot 0{,}04$ mm$^2 = 0{,}4$ mm^2

$$P\left(\left| X - 8000 \right| \le 1 \right) = P\left(7999 \le X \le 8001 \right) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{0{,}4}} \right) =$$

$$= 2 \cdot \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{0{,}4}} \right) - 1 \approx 2 \cdot \Phi\left(1{,}58 \right) - 1 \approx 88{,}6\%$$

---

4. Es ist $E(X) = n \cdot p = 20$ und $Var(X) = n \cdot p \cdot q = 16$. Also ist $q = \frac{16}{20} = 0{,}8$ und $p = 0{,}2$-

Für die Anzahl der Versuche gilt dann $n = \frac{20}{0{,}2} = 100$

Experiment : In einer Urne sind eine rote und vier schwarze Kugeln. Es wird 100mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen.

X : Anzahl der gezogenen roten Kugeln

Damit $P(X \le k) \approx \Phi(\frac{k-20+0,5}{4})$