Abitur 2000		Stochastik II

Die Schüler der K 13 des Graf-Felix-Gymnasiums wollen beim Herbstfest eine Tombola zum Thema "Euro" veranstalten. Dazu werden die folgenden zwei Vorschläge diskutiert.

l. Vorschlag I:

Auf einem Glücksrad sind vier gleich große Sektoren mit den Buchstaben E, U, R und O markiert. Nach jeder Drehung wird der angezeigte Buchstabe notiert.

a) Das Glücksrad wird als ideal vorausgesetzt. Bestimmen Sie die W'keiten der Ereignisse

E_1 : Bei den ersten vier Drehungen wird genau ein E notiert

E_2 : Spätestens bei der vierten Drehung wird erstmals ein E notiert

E_3 : Bei den ersten vier Drehungen werden vier verschiedene Buchstaben notiert

E_4 : Nach fünf Drehungen kann man aus den notierten Buchstabe unter Weglassen eines Buchstabens das Wort EURO bilden.

b) Ein Spiel besteht aus fünfmaligem Drehen des idealen Glücksrads.

Kann man aus den notierten Buchstaben unter Weglassen eines Buchstabens das Wort EURO bilden, gewinnt man einen Preis.

Bestimmen Sie mit HIlfe der Tschebyschow-Ungleichung ein möglichst kleines Intervall, in dem die Zahl der zu vergbenden Preise mit mindestens 90 % W'keit liegt, wenn 640 Spiele ausgeführt werden.

c) Es werden 640 Spiele wie in Teilaufgabe b ausgeführt. Die W'keit, dass die bereit gestellten Preise nicht ausreichen, soll unter 5 % bleiben.

Wie viele Preise müssen mindestens bereitgestellt werden, wenn man die Normalverteilung als Näherung zugrunde legt ?

d) Nach der Inbetriebnahme des Glücksrads ist der Verdacht aufgekommen, dass der Buchstabe E unerwartet oft als Ergebnis auftritt. Die Nullhypothese

H_0: Das Glücksrad liefert den Buchstaben E mit einer W'keit von höchstens 25 %

soll durch 200-maliges Drehen des Glücksrads getestet werden.

Bestimmen Sie die Entscheidungsregel für das Signifikanzniveau 5%.

---

2. Vorschlag II:

In einer Urne liegen 4k, $k \in \mathbb{N}$, gleichartige Kugeln, von denen jeweils k Kugeln einen der Buchstaben E, U, R oder O als Aufschrift tragen.

Ein Teilnehmer an der Tombola zieht vier Kugeln ohne Zurücklegen. Er er hält einen Preis, wenn er aus seinen Buchstaben das Wort EURO bilden kann.

a) Berechnen Sie für $k = 5$ die Wahrscheinlichkeit, dass er einen Preis gewinnt.

b) Wie groß ist in Abhängigkeit von k die Wahrscheinlichkeit p(k), dass er einen Preis gewinnt ?

Bestimmen Sie den Grenzwert von p(k) für $k \to \infty$.

c) Erläutern Sie in Worten, warum der Grenzwert aus Teilaufgabe 2.b) mit dem Ergebnis für $P(E_3)$ aus Teilaufgabe l. a) übereinstimmt.

Lösung

==

I. a) $P(E_1) = \binom{4}{1} \cdot (\frac{1}{4})^1 \cdot (\frac{3}{4})^2 \approx 42{,}2\%$

$P(E_2) = 1 - P(\overline{E_2}) = 1 - (\frac{3}{4})^4 \approx 68{,}4\%$

$P(E_3) = \frac{4!}{4^4} = \frac{3}{32} \approx 9{,}4\%$

$P(E_4) = \dfrac{\binom{4}{1} \cdot \frac{5!}{2!}}{4^5} = \frac{15}{64} \approx 23{,}4\%$

$\binom{4}{1}$: Einer von vier Buchstabe wird zweimal notiert

$\frac{5!}{2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!}$: Anordnung der fünf Buchstaben

$|\Omega| = 4^5$

b) Benötigte Ungleichung und Bedingung : $P\left(\left| X - E(X) \right| \leq \varepsilon \right) > 1 - \frac{Var(X)}{\varepsilon^2} \geq 090$

mit $E(X) = 640 \cdot 0{,}234375 = 150$ und $Var(X) = 114{,}84375$

Eingesetzt ergibt sich : $1-\frac{114{,}84375}{\varepsilon^2}\geq 0{,}90 \;\Leftrightarrow\; \varepsilon^2\geq\frac{114{,}84375}{0{,}1} \;\Rightarrow\; \varepsilon\geq 33$

$I = [117;\ 183]$

c) Bedingung : $P\left(X>k\right)<0{,}5 \quad\Leftrightarrow\quad P\left(X\leq k\right) > 0{,}95 \quad\Leftrightarrow\quad \Phi\left(\frac{k-150+0{,}3}{\sqrt{114{,}84375}}\right) > 0{,}95$

$$\frac{k-150+0{,}3}{\sqrt{114{,}84375}} > 1{,}6449 \;\Rightarrow k\geq 168$$

Es müssen mindesten 168 Preise bereitgestellt werden.

---

2. a) Nullhypothese : $p\leq p_0 = 0{,}25$

Gegenhypothese : $p > p_0 = 0{,}25$

Annahmebereich : $\mathbb{A} = \left\{0;\ ...;\ k\right\}$ Ablehnungsbereich : $\overline{\mathbb{A}} = \left\{k+1;\ ....;\ 200\right\}$

Bedingung : $\alpha = P\left(X\in\overline{\mathbb{A}}\right)\leq 0{,}05 \quad\Leftrightarrow\quad P\left(X\geq k+1\right)\leq 0{,}05 \quad\Leftrightarrow\quad P\left(X\leq k\right)\geq 0{,}95$

$\Leftrightarrow\quad F_{0,25}^{200}(k)\geq 0{,}25 \quad\Rightarrow\quad k = 60$

Also ist $\mathbb{A} = \left\{0;\ ...;\ 60\right\}$ und $\overline{\mathbb{A}} = \left\{60;\ ....;\ 200\right\}$

II. a) $P(A) = \dfrac{\binom{5}{1}\cdot\binom{5}{1}\cdot\binom{5}{1}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{20}{4}}\approx 12{,}9\%$

b) $p(k) = \dfrac{k^4}{\binom{4k}{4}} = \dfrac{24\cdot k^4}{4k\cdot(4k-1)\cdot(4k-2)(4k-3)}$

$$\lim_{k\to\infty} p(k) = \lim_{k\to\infty}\frac{24}{4\cdot(4-\frac{1}{k})\cdot(4-\frac{2}{k})(4k-\frac{3}{k})} = \frac{3}{32}$$

c) Für $k\to\infty$ erhält man Ziehen mit Zurücklegen.
