

1. Eine Kaffeerösterei bezieht ihre Kaffeebohnen aus Lateinamerika, und zwar 2 Sorten aus Brasilien, 2 Sorten aus Venezuela und 4 Sorten aus Kolumbien. In der Rösterei werden jeweils 4 Sorten zusammengemischt, wobei aus jedem Land mindestens eine Sorte vertreten sein muss.

Wie viele solche Mischungen sind möglich ?

2. Angeblich bevorzugen mindestens 30 % der Kaffeetrinker koffeinfreien Kaffee.

- a) Entwerfen Sie auf der Basis von 800 Befragten einen geeigneten Signifikanztest mit dem Signifikanzniveau 5 %.

Ermitteln Sie die Entscheidungsregel; legen Sie dabei die Normalverteilung als Näherung zugrunde.

- b) In München gaben 210 von 800 Befragten an, koffeinfreien Kaffee zu bevorzugen.

Interpretieren Sie dieses Umfrageergebnis im Sinne des von Ihnen in Teilaufgabe a) entworfenen Tests.

3. Als Kaufanreiz legt die Kaffeerösterei in 20 % aller Kaffeedosen ein Kaffeetässchen. Die Dosen gelangen in zufälliger Sortierung in die Regale eines Supermarkts. Monika kauft dort jede Woche eine Dose.

Mit welcher W'keit findet sie

- a) in der 5. Woche das erste Tässchen,
b) spätestens in der 5. Woche das erste Tässchen,
c) frühestens in der 5. Woche das erste Tässchen,
d) genau ein Tässchen in den ersten 5 Wochen ?
-

4. Wie groß müsste der Anteil p der Kaffeedosen mit einem Tässchen mindestens sein, damit mit einer W'keit von mindestens 99 % unter 20 Dosen wenigstens eine mit einem Tässchen ist ?
-

5. Bei einer größeren Lieferung von Porzellantässchen ist ein unbekannter Anteil d beschädigt. Schätzen Sie mit Hilfe der Tschebyschow-Ungleichung die Anzahl der Tässchen ab, die man mindestens überprüfen muss, um d mit einer Sicherheit von mindestens 90% auf 5 Prozentpunkte genau zu bestimmen.
-

6. Der Hersteller der Kaffeetässchen, der normalerweise Tässchen mit einer Ausschussquote von 10 % liefert, kommt mit der Produktion nicht nach. Er bezieht daher 20 % der Tässchen von einem Zulieferer, bei dem die Ausschussquote 30 % beträgt.

Hersteller und Zulieferer verpacken jeweils ihre Tässchen in gleicher Weise in nicht unter-

scheidbare Kisten, die jeweils eine große Anzahl Tässchen enthalten.

In der Kaffeerösterei bemerkt man den erhöhten Ausschuss und führt folgenden Schnelltest durch :

Einer Kiste werden 5 Tässchen entnommen. Wenn darunter höchstens ein Tässchen defekt ist, wird die Kiste verwendet, andernfalls ausgesondert.

Für die Rösterei können dabei folgende zusätzliche Kosten entstehen :

150 € beim Aussondern einer Kiste mit der Ausschussquote 10 % und

120 € bei der Verwendung einer Kiste mit der Ausschussquote 30 %.

a) Berechnen Sie die mittleren zusätzlichen Kosten pro Kiste.

b) Wie viel darf der Schnelltest pro Kiste höchstens kosten, damit er sich gegenüber der Alternative, alle Kisten ungeprüft zu verwenden, aus finanzieller Sicht lohnt ?

Lösung

1.

	Mischung 1	Mischung 2	Mischung 3
Brasilien	2	1	1
Venezuela	1	2	1
Kolumbien	1	1	2

Es gibt $\binom{2}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{4}{1} + \binom{2}{1} \cdot \binom{2}{2} \cdot \binom{4}{1} + \binom{2}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{4}{2} = 40$ Möglichkeiten.

2. a) Nullhypothese : $p \geq p_0 = 0,3$

Gegenhypothese : $p < p_0 = 0,3$

Annahmebereich : $\mathcal{A} = \{k+1; \dots; 800\}$ Ablehnungsbereich : $\bar{\mathcal{A}} = \{0; \dots; k\}$

Bedingung : $\alpha = P(X \in \bar{\mathcal{A}}) \leq 0,05 \Leftrightarrow P(X \leq k) = \Phi\left(\frac{k - 800 \cdot 0,3 + 0,5}{\sqrt{800 \cdot 0,3 \cdot 0,7}}\right) \leq 0,05$

$\Phi\left(\frac{k - 239,5}{\sqrt{168}}\right) \leq 0,05 \Rightarrow \frac{k - 239,5}{\sqrt{168}} \leq \Phi^{-1}(0,05) \Rightarrow \frac{k - 239,5}{\sqrt{168}} \leq -1,6449$

$$\Rightarrow k \leq 218 \quad \text{Also } \mathbb{A} = \{219; \dots; 800\} \text{ und } \overline{\mathbb{A}} = \{0; \dots; 218\}$$

b) Mit 5% Irrtumswahrscheinlichkeit trinken in München weniger als 30% koffeinfreien Kaffee

3. a) $P(A) = 0,8^4 \cdot 0,2 = 0,08192 \approx 8,2\%$

b) $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0,8^5 = 0,67232 \approx 67,2\%$

c) $P(C) = 0,8^4 = 0,4096 \approx 41,0\%$

d) $P(D) = \binom{5}{1} \cdot 0,2 \cdot 0,8^4 = 0,4096 \approx 41,0\%$

4. $P(X \geq 1) \geq 0,99 \Leftrightarrow 1 - P(X=0) \geq 0,99 \Leftrightarrow P(X=0) \leq 0,01$

$$\Leftrightarrow (1-p)^{20} \leq 0,01 \Leftrightarrow 1-p \leq \sqrt[20]{0,01} \Leftrightarrow p \geq 1 - \sqrt[20]{0,01} \Rightarrow p \geq 20,57\%$$

5. Benötigte Ungleichung und Bedingung : $P\left(\left|H_n(X) - p\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\text{Var}(H_n(X))}{\varepsilon^2} \geq 0,90$

mit $\text{Var}(H_n(X)) = \frac{p \cdot q}{n}$ (p, q unbekannt) und $\varepsilon = 0,05$

Eingesetzt ergibt sich : $1 - \frac{p \cdot q}{n \cdot 0,05^2} \geq 0,90 \Leftrightarrow \frac{p \cdot q}{n \cdot 0,05^2} \leq 0,1 \Leftrightarrow n \geq \frac{p \cdot q}{0,05^2 \cdot 0,1}$

$p=q=\frac{1}{2}$ gesetzt : $n \geq \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{0,05^2 \cdot 0,1} = 1000$

Es müssen mindestens 1000 Tässchen überprüft werden.

7. Die Kiste stammt vom Hersteller, wird aber nicht verwendet :

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F_{0,1}^5(1) = 0,08146$$

Die Kiste stammt vom Zulieferer, wird aber verwendet :

$$P(V | \overline{H}) = P(X \leq 1) = F_{0,3}^5(1) = 0,52822$$

a) Entstehende Kosten mit Schnelltest : $0,8 \cdot 0,08146 \cdot 150 \text{ €} + 0,2 \cdot 0,5288 \cdot 120 \text{ €} = 22,47 \text{ €}$

b) Entstehende Kosten ohne Schnelltest : $0,2 \cdot 120 \text{ €} = 24 \text{ €}$

Der Schnelltest darf pro Kiste höchstens $24 \text{ €} - 22,47 \text{ €} = 1,53 \text{ €}$ kosten.
