1. Gegeben ist die Funktion $f: x \to \dfrac{4\cdot(1-\ln x)}{(\ln x)^2}$ mit $D_f = \,]1; \infty[$

   Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

   a) Geben Sie die Nullstelle von f an und untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern von D_f.

   b) Bestimmen Sie die Monotoniebereiche von f und zeigen Sie, dass G_f genau einen Extrempunkt E besitzt. Geben Sie auch Art und Koordinaten von E an.

   $$\left[\text{zur Kontrolle}: f'(x) = \frac{4\cdot(2-\ln x)}{x\cdot(\ln x)^3}\right]$$

   c) Berechnen Sie f (2) und f (12) und zeichnen Sie G_f unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse (Längeneinheit 1 cm).

   d) Begründen Sie ohne Verwendung der 2. Ableitung von f, dass G_f mindestens einen Wendepunkt besitzen muss.

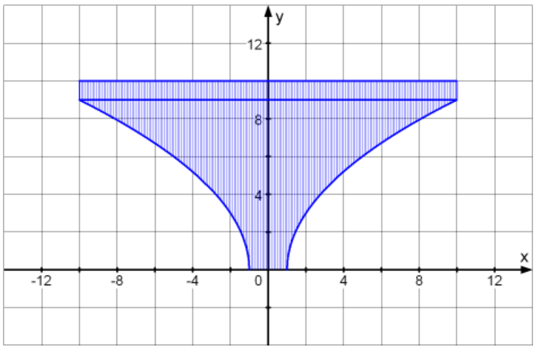
   e) Weisen Sie nach, dass durch $F(x) = -\dfrac{4x}{\ln x} + 4e$ eine integralfreie Darstellung der Funktion $F: x \to \displaystyle\int_e^x f(t)dt$ für $x > 1$ gegeben ist.

   f) G_f und die x-Achse begrenzen im vierten Quadranten ein sich ins Unendliche erstreckendes Flächenstück. Untersuchen Sie, ob dieses einen endlichen Inhalt besitzt.

---

2. In nebenstehender Figur ist der Querschnitt eines bezüglich der y-Achse rotationssymmetrischen, massiven Werkstücks gegeben. Ein Teil der Berandung des Querschnitts ist der Graph G_h der

   Funktion $h: x \to 3\cdot\sqrt{x-1}$ mit $x \in [1; 10]$.



   a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Querschnitts.

   b) Bestimmen Sie die Gleichung der Umkehrfunktion h^{-1} von h und geben Sie den Definitions- und Wertebereich von h^{-1} an.

c) Begründen Sie, dass $10^2 \cdot \pi + \pi \cdot \int_0^9 (1 + \frac{1}{9}x^2)^2 dx$ dass Volumen des Werkstücks angibt und berechnen Sie dieses.

Lösung

==

1. a) $f(x) = 0 \iff \frac{4 \cdot (1 - \ln x)}{(\ln x)^2} = 0 \iff 1 - \ln x = 0 \iff x = e$

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} \frac{4 \cdot (1 - \ln x)}{(\ln x)^2} = \infty$$

weil $\lim_{x \to 1+0} 4 \cdot (1 - \ln x) = 4$ und $\lim_{x \to 1+0} (\ln x)^2 = 0 + 0$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{4 \cdot (1 - \ln x)}{(\ln x)^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{4 \cdot (\frac{1}{\ln x} - 1)}{\ln x} = 0 \text{ weil } \lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$$

b) $$f'(x) = \frac{-\frac{4}{x} \cdot (\ln x)^2 - 4 \cdot (1 - \ln x) \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^4} = \frac{-4 \cdot \ln x - 4 \cdot (1 - \ln x) \cdot 2}{x \cdot (\ln x)^3} =$$

$$= \frac{-4 \cdot \ln x - 4 \cdot (1 - \ln x) \cdot 2}{x \cdot (\ln x)^3} = \frac{4 \cdot (\ln x - 2)}{x \cdot (\ln x)^3} = 0 \Rightarrow x = e^2$$

Monotonieuntersuchung :

	$1 < x < e^2$	$e^2 < x < \infty$
$f'(x)$	$-$	$+$

$T\left(e^2; -1\right)$

c) Graph

d) Der Graph von f hat bei $x = e^2$ einen Tiefpunkt und ist damit in einer Umgebung linksgekrümmt.

Hätte der Graph von f links von $x = e^2$ keinen Wendepunkt, dann würde der Graph von f über seinen Tangenten mit positiver Steigung liegen und die x-Achse schneiden.

Dies ist aber nicht der Fall.

e) $F'(x) = -\frac{4 \cdot \ln x - 4x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{4 \cdot (1 - \ln x)}{(\ln x)^2}$ und $F(e) = -\frac{4e}{\ln e} + 4e = -\frac{4e}{1} + 4e = 0$

Die Funktionen sind auf einem Intervall, besitzen die gleiche Ableitung und ihre Graphen stimmen in einem Punkt überein. Also ist F lediglich eine integralfreie Darstellung der gegebenen Integralfunktion.

f) $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(-\frac{4x}{\ln x} + 4e\right) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{\ln x} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to \infty} x = \infty$

---

2. a) Unbestimmtes Integral :

$$\int 3\sqrt{x-1}\,dx = \int 3\sqrt{u}\,du = 3\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C' = 2u\sqrt{u} + C' = 2 \cdot (x-1)\sqrt{x-1} + C$$

Bestimmtes Integral :

$$\int_1^{10} 3\sqrt{x-1}\,dx = \left[2 \cdot (x-1) \cdot \sqrt{x-1}\right]_1^{10} = 54$$

Fläche :

$$\mathfrak{A} = 20 \cdot 10 - 2 \cdot 54 = 92$$

b) Auflösen :

$$y = 3 \cdot \sqrt{x-1} \Rightarrow \sqrt{x-1} = \frac{y}{3} \Rightarrow x - 1 = \frac{y^2}{9} \Rightarrow x = 1 + \frac{y^2}{8}$$

Umkehrfunktion :

$$h^{-1}(x) = 1 + \frac{x^2}{9}$$

$D_{h^{-1}} = W_h = [0; 9 \quad W_{h^1} = D_h = [1; 10]$

c) Der Körper setzt sich zusammen aus einen Zylinder mit Radius $r = 10$ und Höhe $h = 1$ sowie dem Rotationskörper der entsteht, wenn der Graph von h umd die y-Achse rotiert.

$$\int_0^9 (1 + \frac{1}{9}x^2)^2 dx = \int_0^9 (1 + \frac{2}{9}x^2 + \frac{1}{81}x^4) dx = \left[x + \frac{2}{27}x^3 + \frac{1}{405}x^5 \right]_0^9 = \frac{1044}{5} = 208\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \quad \mathfrak{V} = 308\frac{4}{5}\pi$$
