Gegeben ist die Funktion $f : x \to \dfrac{1}{(x+1)\cdot\ln(x+1)}$

mit der größtmöglichen Definitionsmenge D_f. Der zugehörige Graph wird mit G_f bezeichnet.

Hinweis : $\lim\limits_{x \to 0+0} (x \cdot \ln x) = 0$ darf ohne Beweis verwendet werden.

1. a) Bestimmen Sie D_f und untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern von D_f.

   Geben Sie auch alle Asymptoten an.

   Bestätigen Sie : $f'(x) = -\dfrac{1+\ln(x+1)}{[(x+1)\cdot[\ln(x+1)]^2}$

   Ermitteln Sie das Monotonieverhalten von f sowie Art und Lage des Extrempunkts.

   c) Geben Sie die Gleichung der Tangente t im Punkt) $\left(e-1;\ \dfrac{1}{e}\right)$ an.

   d) Zeichnen Sie G_f und die Tangente t unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $-1 < x < 4$

   Längeneinheit : 2 cm

---

2. a) Begründen Sie allgemein, dass jede streng monotone Funktion umkehrbar ist.

   Zeigen Sie durch Angabe eines Beispiels, dass jedoch nicht jede umkehrbare Funktion streng monoton ist.

   b) Die Einschrankung f^* von f auf $D^* = \mathbb{R}^+$ ist umkehrbar. Für die Umkehrfunktion g von f^* lässt sich kein Funktionsterm g(x) angeben.

   Geben Sie trotzdem $g(\frac{1}{e})$ und $g'(\frac{1}{e})$an.

---

3. Nun wird für $k > 0$ die Schar der Integralfunktionen $J_k : x \to \int\limits_k^x f(t)dt$ betrachtet.

   a) Geben Sie die maximale Definitionsmenge D_k von J_k an.

   b) Bestimmen Sie eine integralfreie Darstellung von J_k.

   c) Es gilt: $J_{e-1}(x) = \ln(\ln(x+1))$.

Lösen Sie die Gleichung $-J_{e-1}(\sqrt{e}-1) = J_{e-1}(x)$

nach x auf und deuten Sie Ihr Ergebnis anhand der Zeichnung aus Teilaufgabe 1. d) geometrisch.

Lösung

===

1.a) Bedingung : $x+1>0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -1 \quad \wedge \quad x+1 \neq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0$

$D =]-1;0[\cup]0;\infty[$

$$\lim_{x \to -1+0} f(x) = \lim_{x \to -1+0} \frac{1}{(x+1)\cdot\ln(x+1)} = \lim_{u \to 0+0} \frac{1}{u\cdot\ln u} = -\infty, \text{denn} \lim_{u \to 0+0} u\cdot\ln u = 0-0$$

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} \frac{1}{(x+1)\cdot\ln(x+1)} = -\infty,$$

denn $\lim\limits_{x \to 0-0} \ln(x+1) = 0-0$ und $\lim\limits_{x \to 0-0} (x+1) = 1$

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} \frac{1}{(x+1)\cdot\ln(x+1)} = \infty,$$

denn $\lim\limits_{x \to 0+0} \ln(x+1) = 0+0$ und $\lim\limits_{x \to 0+0} (x+1) = 1$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{(x+1)\cdot\ln(x+1)} = 0,$$

denn $\lim\limits_{x \to \infty} \ln(x+1) = \infty$ und $\lim\limits_{x \to \infty} (x+1) = \infty$

Senkrechte Asymptoten : $x = -1$ und $x = 0$

$$f'(x) = \frac{-\ln(x+1)-1}{(x+1)^2\cdot[\ln(x+1)]^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x+1) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}-1$$

Monotonieuntersuchung :

x	$-1 < x < \frac{1}{e} - 1$	$\frac{1}{e} - 1 < x < 0$	$0 < x$
f '(x)	+	–	–
	sms	smf	smf

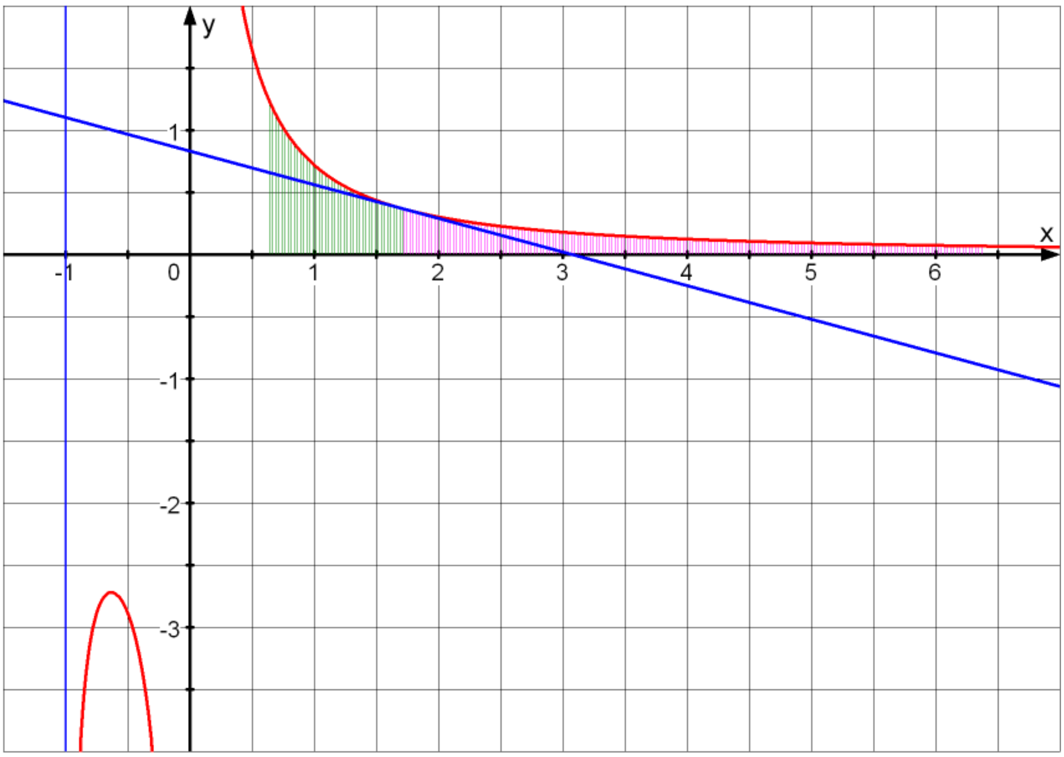
$E\left(\frac{1}{e} - 1;\ -e\right)$ ist **Hochpunkt** des Graphen.

c) $f(e-1) = \dfrac{1}{(e-1+1)\cdot\ln(e-1+1)} = \dfrac{1}{e}$

$f'(e-1) = -\dfrac{1+\ln(e-1+1)}{[(e-1+1)\cdot[\ln(e-1+1)]^2} = -\dfrac{2}{e^2}$

Gleichung der Tangente im Punkt $\left(e-1;\ \frac{1}{e}\right)$ $t: y = -\dfrac{2}{e^2}(x-e+1)+\dfrac{1}{e}$

d) Graph :



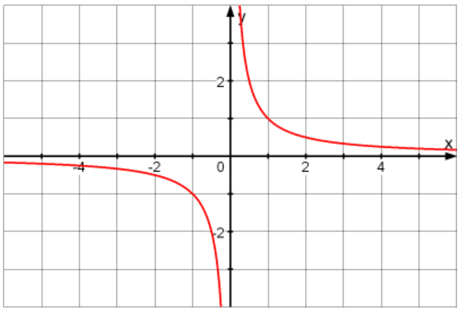
---

2. a) Sei f o.E.d.A. eine streng monoton zunehmende Funktion mit der Definitionsmenge D.

Sind $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$, dann ist $f(x_1) < f(x_2)$ und damit $f(x_1) \neq f(x_2)$.

f ist also umkehrbar.

$f: x \to \frac{1}{x}$ mit $x \neq 0$ ist umkehrbar, aber auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ nicht monoton.



b) $g(\frac{1}{e}) = e-1$ und $g'(\frac{1}{e}) = \frac{1}{f'(e-1)} = \frac{1}{-\frac{2}{e^2}} = -\frac{e^2}{2}$

---

3. a) $D_k = \mathbb{R}^+$

b) Mit logarithmischer Integration folgt

$$J_k(x) = \int_k^x f(t)dt = \ln\Big[\ln(x+1)\Big] - \ln\Big[\ln(k+1)\Big]$$

c) $-J_{e-1}(\sqrt{e}-1) = J_{e-1}(x) \quad \Leftrightarrow \quad -\ln(\ln\sqrt{e}) = \ln[\ln(x+1)] \quad \Rightarrow \quad \ln 2 = \ln(x+1)$

$\Rightarrow \quad x = e^2 - 1$