Abitur 1995		Analytische Geometrie II

Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem die beiden Geradenscharen g_t und h_t :

$$g_t : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \; h_t : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2t \\ -3t \\ 2+5t \end{pmatrix}, \; t, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

1. a) Begründen Sie, daß alle Geraden der Schar g_t zueinander parallel sind und dass alle Geraden der Schar h_t einen gemeinsamen Punkt haben.

   b) Die Ebene G enthält alte Geraden g_t. Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene G in Normalenform.

   Welche besondere Lage hat die Ebene G im Koordinatensystem ?

   $\left[\text{mögliches Ergebnis : } G : 3x_1 - x_3 = 0\right]$

   c) Weisen Sie nach, dass alle Geraden h_t in der Ebene $H : 3x_1 + 2x_2 - 12 = 0$ liegen.

   d) G und H schneiden sich in einer Geraden s. Ermitteln Sie eine Gleichung von s.

Im folgenden bezeichnen G und H die. in Teilaufgabe 1 definierten Ebenen.

Die Ebene $F : 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 12 = 0$ enthält die Geraden g_2 und h_2 (Nachweis nicht erforderlich).

2. a) Welche gegenseitige Lage haben die Geraden g_2 und h_2 ?

   b) Berechnen Sie den Abstand von g_2 und h_2.

   c) Fertigen Sie eine Skizze an, aus der die Lagebeziehungen der Ebenen F, G und H sowie ihrer Schnittgeraden zueinander hervorgehen.

---

3. a) Begründen Sie ohne Rechnung, daß die Ebenen F, G und H gemeinsame Lotebenen haben, und geben Sie eine Gleichung derjenigen Lotebene L in Normalenform an, die den Ursprung enthält.

   b) Die drei Ebenen F, G und H schneiden aus L ein Dreieck heraus. Berechnen Sie dessen Flächeninhalt, und entscheiden Sie, ob der Ursprung innerhalb, außerhalb oder auf dem Rand des Dreiecks liegt.

Lösung

==

1. a) Alle Geraden der Schar g_t haben die gleichen Richtung und die Geraden der Schar h_t einen gemeinsamen Aufpunkt.

b) Umformung : $g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Normalenvektor von G : $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{n_G} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Normalenform von G : $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x_1 - x_3 = 0$

G ist eine Ebene durch die x_2 – Achse des Koordinatensystems.

c) h_t in H : $3 \cdot (4 + 2t\mu) + 2 \cdot (-3t\mu) - 12 = 12 + 6t\mu - 6t\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad h_t \subset H$

d) $x_1 = \sigma$ in G : $x_3 = 3\tau$

in H : $3\tau + 2x_2 - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 6 - 1{,}5\tau$

Schnittgerade s : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$

---

2. a) $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, h_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad g_2 \parallel h_2 \parallel s$

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \left| \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = 28 \qquad \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = 7 \quad d(g_2; h_2) = \frac{28}{7} = 4$

---

3. a) Die drei Sc
