Abitur 1995		Analytische Geometrie I

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A\left(12\mid 1\mid 4\right)$, $B\left(4\mid 5\mid -4\right)$ und $C_k\left(k\mid 4k-5\mid k+4\right)$ mit $k\in\mathbb{R}$ gegeben.

1. a) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C_k für alle $k\in\mathbb{R}$ ein Dreieck bilden.

b) Weisen Sie nach, dass C_k in der Symmetrieebene der Punkte A, B und C liegt. Welche Eigenschaft ergibt sich daraus für das Dreieck ABC_k ?

c) Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an, auf der alle Punkte C_k liegen

Welche Beziehung haben die Richtung von g und die Richtung der Geraden AB zueinander ?

d) Bestimmen Sie den Wert des Parameters k so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks ABC_k minimal wird. Wie groß ist dieser Flächeninhalt ?

$\left[\text{Teilergebnis : } k = 2\right]$

e) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide ABC_2C_0.

---

2. E_0 ist die Ebene, die die Punkte A, B und C_0 enthält.

a) Ermitteln Sie eine Gleichung von E_0 in Normalenform.

$\left[\text{mögliches Ergebnis : } -x_1+2x_2+2x_3+2 = 0\right]$

b) Zeigen Sie, dass sich die Ebene E_0 und die Gerade g aus Teilaufgabe 1. c) unter einem Winkel von 45° schneiden.

Für $k\neq 0$ ist F_k der Fußpunkt des Lotes von C_k auf E_0.

c) Berechnen Sie F_k. Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass F_k von C_0 und C_k gleich weit entfernt ist.

$\left[\text{Teilergebnis : } F_k(2k|2k-5|-k+4)\right]$

d) Für welchen Wert von k ist der Fußpunkt F_k von C_0 und A gleich weit entfernt ?

Welche besondere Eigenschaft hat für dieses k der Fußpunkt F_k für die Pyramide ABC_0C_k ?

---

1. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = -8 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Damit die drei Punkte immer ein Dreieck bilden, darf C_k nicht auf der Geraden AB liegen oder man zeigt, dass der Vektor $\overrightarrow{AC_k}$ kein Vielfaches des Vektors $\overrightarrow{AB}$ ist.

1. Möglichkeit

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = -8 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Also ist AB : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

C_k in AB :

(1) $k = 12 + 2\lambda$

(2) $4k - 5 = 1 - \lambda$

(3) $k + 4 = 4 + 2\lambda$

$(3) - (1)$ ergibt $4 = -8$ und dies ist ein Widerspruch !

Die drei Punkte A, B und C_k bilden für alle $k \in \mathbb{R}$ ein Dreieck.

b) Symmetrieebene S : $-2x_1 + x_2 - 2x_2 + n_4 = 0$

Mittelpunkt M von $\left[AB\right]$: $M\left(8 \mid 3 \mid 0\right)$

M in S eingesetzt : $-16 + 3 + n_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad n_4 = 13$

C_k in S : $-2k + 4k - 5 - 2k - 8 + 13 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_k \in S$

Das Dreieck ABC_k ist für alle $k \in \mathbb{R}$ gleichschenklig.

c) $\overrightarrow{c_k} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-8\\4\\8\end{pmatrix} = 0$$ d.h. die Richtungen der Geraden stehen aufeinander senkrecht.

d) $\overrightarrow{MC_k} = \begin{pmatrix}k-8\\4k-8\\k+4\end{pmatrix}$

Ein minimaler Flächeninhalt ergibt sich, wenn $\overrightarrow{MC_k}$ auf dem Richtungsvektor von g senkrecht steht

Minimalbedingung für

$\overline{MC_k}: 1\cdot(k-8)+4\cdot(4k-8)+1\cdot(k+4) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 18k-36 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad k = 2$

$\overrightarrow{MC_2} = \begin{pmatrix}-6\\0\\6\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \overline{MC_k} = 6\sqrt{2}$ und $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-8\\4\\-8\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \overline{AB} = 12$

$\mathfrak{I}_{ABC_2} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{MC_2} = \frac{1}{2}\cdot 12\cdot 6\sqrt{2} = 36\sqrt{2}$

e) $\overrightarrow{AC_0} = \begin{pmatrix}-12\\-6\\0\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC_2} = \begin{pmatrix}-10\\2\\2\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}-8 & -12 & -10\\ 4 & -6 & 2\\ -8 & 0 & 2\end{vmatrix} = 96+192+480+96 = 864 \quad\Rightarrow\quad \mathfrak{I}_{ABC_2C_0} = 144$$

---

2. a) $C_0\left(0\mid -5\mid 4\right)$ ergibt $\overrightarrow{AC_0} = \begin{pmatrix}-12\\-6\\0\end{pmatrix} = -6\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\4\\4\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$$

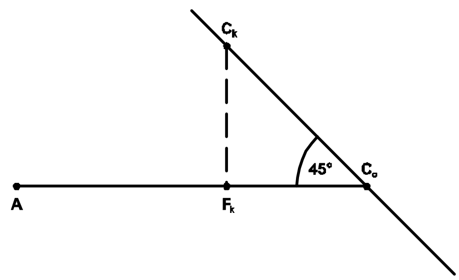
$$E_0 : \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \right] = -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2 = 0$$

b) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 9 \quad \sin\sigma = \left| \dfrac{9}{3 \cdot \sqrt{18}} \right| = \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 45°$

c) Lot von C_k auf E_0: $\vec{x} = \begin{pmatrix} k \\ 4k-5 \\ k+4 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Eingesetzt in $E_0 : -k + \tau + 8k - 10 + 4\tau + 2k + 8 + 4\tau + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = -k$

Eingesetzt in die Gleichung des Lotes ergibt sich $F_k\left(2k \mid 2k-5 \mid -k+4\right)$



Das Dreieck $C_0F_kC_k$ ist gleichschenklig rechtwinklig mit einem rechten Winkel bei F_k.

Daher ist $\overline{F_kC_k} = \overline{F_kC_0}$.

d) $\overrightarrow{F_kC_k} = \begin{pmatrix} -k \\ 2k \\ 2k \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{F_kA} = \begin{pmatrix} 2k-12 \\ 2k-6 \\ -4 \end{pmatrix}$

Bedingung : $k^2 + 4k^2 + 4k^2 = (2k-12)^2 + (2k-6)^2 + k^2 \quad \Rightarrow \quad k = 2{,}5$

F_k ist dann der Mittelpunkt der Umkugel der Pyramide.