Abitur 1990		Analytische Geometrie II

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A\left(12{,}5 \mid 3 \mid 4\right)$ und $B\left(2{,}5 \mid 6 \mid 0\right)$ gegeben.

1. a) Eine Ebene E liegt parallel zur x_1-Achse und enthält die Punkte A und B.

Stellen Sie für E eine Gleichung in Normalenform auf.

$\left[\text{Mögliches Ergebnis}: 4x_2 + 3x_3 - 24 = 0\right]$

b) Berechnen Sie die Schnittpunkte von E mit der x_2-Achse bzw. x_3-Achse.

Legen Sie ein Schrägbild des Koordinatensystems an, tragen Sie die Punkte A und B ein, und machen Sie die Lage der Ebene E durch Einzeichnen ihrer Schnittgeraden mit den Koordinatenachsen deutlich.

---

2. a) Ermitteln Sie die Gleichung derjenigen Geraden g, die im Punkt B auf AB senkrecht steht und in der Ebene E liegt.

b) Das Rechteck ABCD soll ganz in der Ebene E, die Ecke C außerdem in der x_2x_3-Ebene liegen. Berechnen Sie die Koordinaten von C und D. $\left[\text{Teilergebnis}: C(0 \mid 3 \mid 4)\right]$

c) Ergänzen Sie die Zeichnung durch das Rechteck ABCD, ferner durch die Punkte A_0, B_0, C_0 und D_0, die durch senkrechte Projektion von A, B, C und D auf die x_1x_2-entstehen.

Welches besondere Viereck bestimmen die Punkte A_0, B_0, C_0 und D_0 ?

Geben Sie die Koordinaten dieser Punkte an.

---

3. a) A_0, B_0, C_0 und D_0 ist die Grundfläche einer Pyramide, deren Spitze S im Innern oder auf dem Rand des Dreiecks ACD liegt.

Für welche Lagen von S nimmt das Pyramidenvolumen den kleinsten Wert an ? Berechnen Sie diesen Wert.

b) Ermitteln Sie ohne weitere Rechnung die Koordinaten des Fußpunktes F des Lotes von B_0 auf die Ebene A_0C_0C; und tragen Sie F in die Zeichnung ein.

---

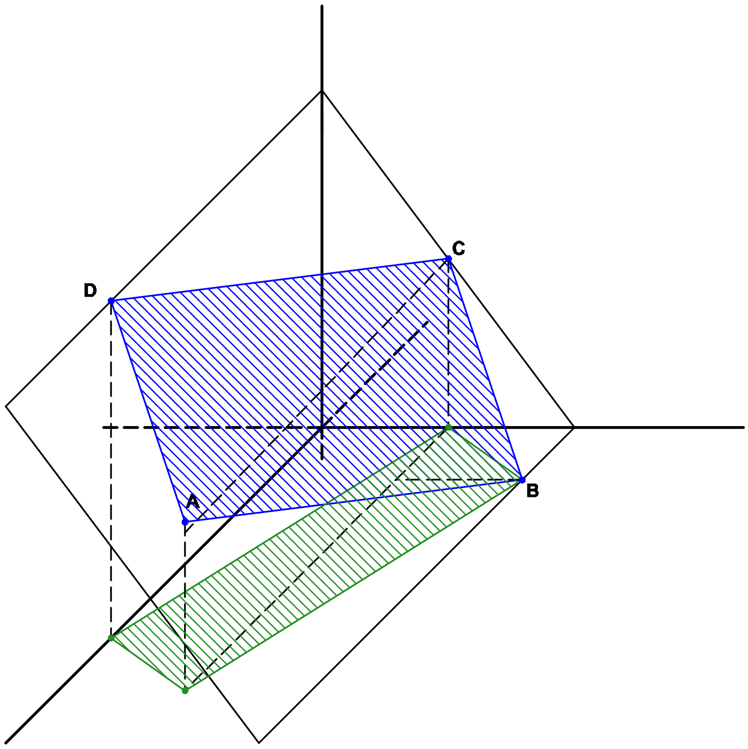
1. a) Parameterform : $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{Normalenform}: \begin{vmatrix} x_1-2{,}5 & 10 & 1 \\ x_2-6 & -3 & 0 \\ x_3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 4x_2-24+3x_3 = 0$$

b) Schnittpunkt mit der x_2-Achse : $S_{x_2}\left(0\,|\,6\,|\,0\right)$

Schnittpunkt mit der x_3-Achse : $S_{x_3}\left(0\,|\,0\,|\,8\right)$

c)



---

2. a) Der Richtungsvektor von g steht auf $\overrightarrow{AB}$ und dem Normalenvektor von E senkrecht.

$$\begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 \\ -30 \\ 40 \end{pmatrix} = -5\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} \qquad \text{Gleichung von } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

b) Schnitt von g mit der x_2x_3-Ebene : $2{,}5+5\tau = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = -0{,}5$

In g eingesetzt ergibt dies $C\left(0\,|\,3\,|\,4\right)$

$$\vec{d} = \vec{c} + \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ und damit } D\left(10 \mid 0 \mid 8\right)$$

c) $A_0\left(12{,}5 \mid 3 \mid 0\right)$, $B_0\left(2{,}5 \mid 6 \mid 0\right)$, $C_0\left(0 \mid 3 \mid 0\right)$, $D_0\left(10 \mid 0 \mid 0\right)$

sind die Eckpunkte eines Parallelogramms.

3.a) Das kleinste Volumen ergibt sich für $S = A$ bzw. $S = C$:

$$\overrightarrow{A_0B_0} = \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{A_0D_0} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 37{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{I}_{A_0B_0C_0D_0A} = \frac{1}{3} \cdot 37{,}5 \cdot 4 = 50$$

b) F hat die gleich x_1-Koordinate wie B und die gleich x_2-Koorinate wie C_0, weil A_0C_0

parallel zur x_1 Achse verläuft. Weil F in der x_1x_2-Ebene verläuft, ist die x_3-Koordinate 0.

$F\left(2{,}5 \mid 3 \mid 0\right)$
