Vektoren - Skalar- und Vektorprodukt

===

1. Gegeben sind die Punkte $A\left(1 \mid 2 \mid 3\right)$ und $B\left(-3 \mid 4 \mid -1\right)$ bzgl. eines kartesischen Koordinatensystems mit dem Koordinatenursprung O.

   Gib an

   a) $\vec{A}$ b) $\overrightarrow{AB}$ c) $\overrightarrow{BA}$ d) $3 \cdot \overrightarrow{AB}$

   e) $\vec{A} + \overrightarrow{BA}$ f) $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ g) $\left|\overrightarrow{BA}\right|$ g) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OA}$

   Bestimme ferner die Koordinaten des Bildpunktes von B bei der Spiegelung

   h) an x_2x_3-Koordinatenebene i) an der x_3-Achse j) am Ursprung.

----

2. Gegeben : $A\left(4 \mid -1 \mid 5\right)$, $B\left(0 \mid 1 \mid 11\right)$, $C\left(8 \mid 9 \mid 5\right)$ und $D\left(-2 \mid -1 \mid 1\right)$.

   Zeige, dass die Seitenmitten des Vierecks ABCD ein Parallelogramm bilden.

----

3. Gegeben : $A\left(-4 \mid 1 \mid 7\right)$, $B\left(4 \mid 3 \mid 10\right)$ und $C\left(8 \mid 5 \mid 3\right)$

   Bestimme den Punkt D so, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm i

----

4. Gegeben : $A\left(1 \mid 1 \mid 4\right)$, $B\left(6 \mid 3 \mid 0\right)$ und $S\left(4 \mid 0 \mid 3\right)$.

   Bestimme C so, dass das Dreieck ABC den Schwerpunkt S besitzt.

----

5. Gegeben : $A\left(3 \mid 0 \mid 5\right)$, $B\left(7 \mid 7 \mid 10\right)$ und $M\left(5 \mid 6 \mid 6\right)$.

   Bestimme die Punkte C und D so, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm mit dem Diagonalenschnittpunkt M ist.

----

6. Untersuche, ob das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.

   a) $A\left(3 \mid -6 \mid 5\right)$, $B\left(6 \mid 5 \mid -4\right)$, $C\left(8 \mid 8 \mid -2\right)$ und $D\left(5 \mid -3 \mid 7\right)$

b) $A\left(0 \mid 8 \mid -6\right)$, $B\left(-9 \mid 5 \mid 0\right)$, $C\left(4 \mid 0 \mid 3\right)$ und $D\left(1 \mid 5 \mid 1\right)$.

----

7. Gegeben : $A\left(2 \mid 3 \mid -1\right)$, $B\left(4 \mid 4 \mid 1\right)$, $C\left(3 \mid 4 \mid 3\right)$ und $D\left(1 \mid 5 \mid 1\right)$

   a) Zeige, dass das Viereck ABCD eine Raute ist.

   b) Berechne die Größe der Winkel und den Flächeninhalt der Raute.

---

8. Gegeben : $A(1 \mid 2 \mid 6)$ und $B(3 \mid 3 \mid 4)$

Bestimme den Repräsentanten eines Vektors, der zu $\overrightarrow{AB}$ parallel ist, dessen Anfangspunkt ebenfalls A ist und dessen Spitze in der x_1x_2-Ebene liegt.

---

9. Gegeben : $A(30 \mid 0 \mid 3)$, $B(10 \mid 1 \mid 10)$, $C(25 \mid -8 \mid 22)$ und $D(25 \mid 13 \mid 19)$

Zeige, dass das Tetraeder ABCD regulär ist.

---

10. Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \\ 7{,}5 \end{pmatrix}$, Bestimme die Koordinaten eines zu $\vec{a}$ parallelen

Vektors mit der Länge 7.

---

11. Gegeben : $A(-3 \mid 12 \mid 6)$ und $B(0 \mid 6 \mid 3)$

Welche Punkte auf der x_1-Achse sind von A doppelt so weit weg wie vom Punkt B ?

---

12. Gegeben : $A(-2 \mid 2 \mid 3)$, $B(6 \mid -2 \mid 7)$, $C(6 \mid 1 \mid 4)$ und $D(2 \mid 3 \mid 2)$

Zeige, dass das Viereck ABCD ein gleichschenkliges Trapez ist.

---

13. Gegeben : $A(1 \mid -1 \mid 5)$, $B(11 \mid 4 \mid -5)$, $C(3 \mid 5 \mid 0)$ und $D(1 \mid 4 \mid 2)$

a) Zeige, dass das Viereck ABCD ein Trapez ist.

b) Berechne die Länge seiner Mittellinie.

c) AECD ist ein Parallelegramm mit $E \in AB$. Bestimme die Koordinaten von E.

---

14. Gegeben : $A(1 \mid 1 \mid 1)$, $B(7 \mid 4 \mid 3)$ und $C(-7 \mid 5 \mid 0)$

Bestimme einen Vektor in Richtung der Winkelhalbierenden des Winkel α im Dreieck ABC.

---

15. Gegeben : $A(-1 \mid 1 \mid 0)$, $B(-2 \mid 2 \mid 0)$ und $C(2 \mid 1 \mid -3)$

Bestimme den Punkt P in der x_1x_2-Ebene, der von A, B und C den gleichen Abstand hat.

---

16. Der Punkt B des Drachenvierecks ABCD mit $A\left(11 \mid 2 \mid 3\right)$ und $C\left(3 \mid -6 \mid 1\right)$ liegt auf der x_1-Achse und hat BD als Symmetrieachse. E.

D ist doppelt so weit vom Diagonalenschnittpunkt entfernt wie B.

Bestimme und D sowie den Flächeninalten des Drachenvierecks.

---

17. Bestimme k so dass die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} k+1 \\ 2-2k \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} k \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ aufeinander senkrecht stehen.

---

18. Gegeben : $A\left(-2 \mid 1 \mid 4\right)$, $B\left(1 \mid -5 \mid 7\right)$, $C\left(4 \mid 3 \mid 2\right)$ und $D\left(-1 \mid 5 \mid 11\right)$

a) Zeige, dass die von A auslaufenden Kanten der Pyramise ABCD paarweise aufeinander senkrecht stehen.

b) Berechne das Volumen V der Pyramide.

---

19. Gegeben : $A\left(7 \mid 6 \mid 3\right)$, $B\left(4 \mid 10 \mid 1\right)$, $C\left(-2 \mid 6 \mid 2\right)$ und $D\left(1 \mid 2 \mid 4\right)$

Beweise, dass das Viereck ABCD ein Rechteck ist.

---

20. Gegeben : $A\left(2 \mid 3 \mid -2\right)$ und $B\left(6 \mid -1 \mid 1\right)$.

Für welche Punkte P der x_1-Achse gilt $\measuredangle APB = 90°$.

---

21. Gegeben : $A\left(8 \mid 1 \mid -1\right)$ und $C\left(2 \mid 4 \mid -3\right)$

Bestimme einen Punkt B auf der x_2-Achse, so dass das Dreieck ABC gleichschenklig mit der Spitze C ist.

---

22. Gegeben : $A\left(-1 \mid 0 \mid 0\right)$ und $B\left(0 \mid 2 \mid 2\right)$

Der Punkt C des Rechtecks ABCD liegt auf der x_1-Achse.

Bestimme C und D sowie den Inhalt des Rechtecks.

---

23. Gegeben : $\vec{a} = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Für welche Werte von k, hat das von beiden Vektoren aufgespannte Parallelogramm den Inhalt 3 ?

---

24. Gegeben : $A\left(8\mid 5\mid 7\right)$ und $B\left(5\mid 5\mid 4\right)$ sowie $M\left(4\mid 3\mid 2\right)$.

Berechne für das Parallelogramm ABCD mit dem Mittelpunkt M den Inhalt und die Länge der beiden Höhen des Parallelogramms.

---

25. Gegeben : $A\left(3\mid 5\mid 5\right)$, $B\left(1\mid 1\mid 1\right)$ und $C\left(5\mid 3\mid -3\right)$.

ABCD ist die Grundfläche einer geraden quadratischen Pyramide mit der Höhe $h = 9$.

Bestimme die Koordinaten der beiden möglichen Spitzen.

---

26. Gegeben : $A\left(10\mid 0\mid 0\right)$, $B\left(0\mid 6\mid 0\right)$ und $C\left(0\mid 0\mid 4\right)$.

A, B und C sind zusammen mit dem Ursprung O die Ecken eines Tetreders.

a) Berechne den Inhalt seiner Oberfläche

b) Die Länge der Höhe des Tetraeders, die nicht mit einer seiner Kanten zusammenfällt.

---

27. Gegeben : $A\left(0\mid 10\mid 4\right)$ und $B\left(2\mid 14\mid 8\right)$

Für welche Punkte C auf der x_1-Achse hat das Dreieck ABC den Inhalt 18 ?

---

28. Gegeben : $A\left(6\mid 8\mid 3\right)$, $B\left(3\mid 2\mid 1\right)$ und $C\left(9\mid 0\mid -2\right)$.

Die Punkte A, B und C sind die Ecken der Grundfläche eines geraden dreiseitigen Prismas mit dem Volumen 343. Die entsprechenden Ecken der Deckfläche sind D, E und F.

Bestimme ihre Koordinaten.

---

29. Gegeben : $P\left(0\mid 0\mid 1\right)$, $Q\left(-3\mid 4\mid 3\right)$ und $R\left(5\mid -3\mid 5\right)$.

Die Punkte P, Q und R sind Mittelpunkte von Kugeln mit dem Radius 3. Eine Ebene berührt die Kugeln so, dass P, Q und R auf derselben Seite der Ebene liegen.

a) Bestimme die beiden möglichen Punkte, in denen die Ebene die Kugel mit Mittelpunkt P berührt.

b) Wie groß ist der Inhalt des Dreiecks, das durch die drei Berührpunkte bestimmt ist.

c) Wie viele Ebenen, welche die drei Kugeln berühren gib es ?

---

1. Lösung

a) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ c) $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ d) $3 \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$

e) $\vec{A} + \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ f) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 6$ g) $\left|\overrightarrow{BA}\right| = 6$ g) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OA} = -12$

---

2. Lösung: $M_a\left(2 \mid 0 \mid 8\right)$, $M_b\left(4 \mid 5 \mid 8\right)$, $M_c\left(3 \mid 4 \mid 3\right)$ und $M_d\left(1 \mid -1 \mid 3\right)$

---

3. Lösung: $\vec{D} = \vec{C} + \overrightarrow{BA}$ ergibt $D\left(0 \mid 3 \mid 0\right)$

---

4. Lösung: $M_c\left(3{,}5 \mid 2 \mid 2\right)$ und $\overrightarrow{M_cS} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und damit $C\left(5 \mid -4 \mid 5\right)$

---

5. Lösung: $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ und damit $C\left(7 \mid 12 \mid 7\right)$ sowie $\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ und damit $D\left(3 \mid 5 \mid 2\right)$

---

6. Lösung: a) ABCD ist ein Parallelogramm b) ABCD ist kein Parallelogramm

---

7. Lösung

a) $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = 3$

b) $\overline{AC} = 3\sqrt{2}$ und $\overline{BD} = \sqrt{10}$ und damit $\mathfrak{I}_{ABCD} = 15\sqrt{2}$

$\alpha = 73{,}4°$

---

8. Lösung: $\vec{A} + k \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = 3$

---

9. Lösung

$s = 15\sqrt{2}$

---

10. Lösung : $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

---

11. Lösung : $4a^2 + 180 = (-3-a)^2 + 180 \quad \Rightarrow \quad a = -1 \lor a = 3$

---

12. Lösung: AB ∥ CD und $\overline{AD} = \overline{BC} = 3\sqrt{2}$

---

13. Lösung: a) AB ∥ DC b) $m = 12$ c) $E(3 \mid 0 \mid -3)$

---

14. Lösung : $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 55 \end{pmatrix}$

---

15. Lösung: (1) $(a+1)^2 + (b-1)^2 = (a+2)^2 + (b-2)^2$

(2) $(a+1)^2 + (b-1)^2 = (a-2)^2 + (b-1)^2 + 9$ ergibt $P(2 \mid 5 \mid 0)$

---

16. Lösung : $B(5{,}5 \mid 0 \mid 0)$ und $M(7 \mid -2 \mid 2)$ ergibt $D(10 \mid -6 \mid 6)$

---

17. Lösung : $k = 2 \lor k = 5$

---

18. Lösung : a) --- b) $\mathfrak{V} = 66$

---

19. ---

---

20. Lösung: $P(1 \mid 0 \mid 0)$ und $P(7 \mid 0 \mid 0)$

---

21. Lösung: $B(0 \mid -2 \mid 0)$ oder $B(0 \mid 10 \mid 0)$

---

22. Lösung : $C(8 \mid 0 \mid 0)$ und $\mathfrak{A} = 18\sqrt{2}$

---

23. Lösung : $k = 2 \lor k = 6$

---

24. Lösung: $C(0 \mid 1 \mid -3)$ und $\mathfrak{A} = 18$

---

25. Lösung : $M(4 \mid 4 \mid 1)$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

---

26. Lösung: a) $\mathfrak{O} = 30 + 20 + 12 + 38 = 100$ b) $\mathfrak{V} = 40 \Rightarrow h = \frac{120}{38} = \frac{60}{19}$

---

27. Lösung

$$\begin{pmatrix} c \\ -10 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -8-4c \\ 4c+20 \end{pmatrix} \Rightarrow 576 + (8+4c)^2 + (4c+20)^2 = 1296 \Rightarrow c = 1 \vee c = -8$$

---

28. Lösung

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -21 \\ 42 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathfrak{I} = \frac{1}{2} \cdot 49 = 24{,}5 \Rightarrow h = 14 \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

---

29. Lösung

a) $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

a) $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 22 \\ 22 \\ -11 \end{pmatrix}$ mit dem Betrag $\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = 33$

$$\vec{P_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{P_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) $\mathfrak{A} = \frac{1}{2} \cdot 33 = 16{,}5$

c) E gibt 8 Ebenen, welche alle drei Kugeln berühren.
