5. Urnenexperimente

==

Beispiel:

In einer Urne befinden sich 3 rote und 5 blaue Kugeln. Es werden

a) gleichzeitig

b) hintereinander ohne Zurücklegen

c) hintereinander mit Zurücklegen

gezogen. Wie groß ist die W'keit, dass eine rote und zwei blaue Kugeln gezogen werden.

a) $|\Omega| = \binom{8}{3} = 56 \quad |A| = \binom{3}{1}\cdot\binom{5}{2} = 30 \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{30}{56} = \frac{15}{28} \approx 53{,}6\%$

b)
$|\Omega| = 8\cdot 7\cdot 6 = 336 \quad |B| = 3\cdot 5\cdot 4 + 5\cdot 3\cdot 4 + 5\cdot 4\cdot 3 = 168 \quad \Rightarrow \quad P(B) = \frac{180}{336} = \frac{15}{28} \approx 53{,}6\%$

c) Es handelt sich um eine Bernoulli-Kette der Länge 3 mit der Trefferwahrscheinlichkeit
$p = \frac{3}{8}$ für das Ziehen einer roten Kugel.

$$P(C) = B\left(3;\, \frac{3}{8};\, 1\right) = \binom{3}{1}\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^1\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{225}{512} \approx 43{,}9\%$$

Befinden sich in einer Urne Kugeln der Sorte A und b Kugeln der Sorte B,

dann ist die W'keit beim gleichzeitigen Ziehen von $a_1 + b_1$ Kugeln a_1 Kugeln der Sorte A

und b_1 Kugeln der Sorte B zu erhalten, gegeben durch

$$\boxed{P\left(X = a_1;\, Y = b_1\right) = \frac{\binom{a}{a_1}\cdot\binom{b}{b_1}}{\binom{a+b}{a_1+b_1}}}$$

Dabei ist $0 \le a_1 \le a$ und $0 \le b_1 \le b$.

Erfolgt die Ziehung hintereinander ohne Zurücklegen, dann ergibt sich das gleiche Ergebnis.

Die Ziehung ohne Zurücklegen lässt sich als Bernoullikette behandeln.

Baumdiagramme sind sehr nützlich!

Aufgabe in der Handreichung

In einer Urne sind vier Kugeln. Davon ist eine mit dem Buchstaben S, eine mit I, eine mit E und eine mit B beschriftet.

a) Man zieht nacheinander drei Kugeln ohne Zurücklegen. Bestimmen Sie, mit welcher W'keit dabei das Wort "ISB" gezogen wird.

b) Man zieht drei Kugeln ohne Zurücklegen. Bestimmen Sie, mit welcher W'keit sich aus den drei gezogenen Buchstaben das Wort "ISB" bilden lässt.

c) Wie viele unterschiedliche Buchstabenfolgen können gezogen werden, wenn man nacheinander alle Kugeln aus der Urne zieht ?

Lösung

a) $P(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$

b) $P(B) = 3! \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{4}$

c) $4! = 24$

Aufgabe in der Handreichung

Am Zoll stehen 9 Personen an, 4 davon sind Schmuggler. Ein Zöllner bittet von den 9 Personen 3 zur Kontrolle. Alle 3 werden als Schmuggler entlarvt.

Bestimmen Sie die W'keit für ein derart gutes Ergebnis, wenn die Personen rein zufällig ausgewählt wurden.

Lösung

$$P(A) = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{5}{0}}{\binom{9}{3}} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21} \approx 4{,}8\%$$
