Grundkursabitur 2006	Stochastik	Aufgabe IV

1. Für eine Fernseh-Quizshow werden 10 Kandidaten benötigt. Da von den eingeladenen Kandidaten erfahrungsgemäß im Mittel 5% nicht erscheinen, werden zu jeder Show 12 Personen eingeladen.

Mit welcher W'keit erscheinen

a) genau 10 Personen,

b) weniger als 10 Personen?

---

2. Zu Beginn der Show müssen vier Berge ihrer (verschiedenen) Höhe nach aufsteigend geordnet werden.

Wie groß ist die W'keit, die richtige Reihenfolge durch reines Raten zu erhalten?

---

3. Einem Kandidaten werden der Reihe nach Fragen gestellt, wobei er aus jeweils vier Antworten die einzig richtige herausfinden muss. Wird die erste Frage richtig beantwortet, so hat der Kandidat 125 € auf seinem Gewinnkonto.

Mit jeder weiteren richtigen Antwort verdoppelt sich der Betrag auf seinem Gewinnkonto bis zu einer maximalen Höhe von 256000 €. Bei einer falschen Antwort scheidet der Kandidat mit dem bis dahin erreichten Gewinn aus.

a) Ein Kandidat hat bereits die ersten drei Fragen richtig beantwortet. Mit welcher W'keit erzielt er durch reines Raten einen Gewinn von mindestens 16 000 €?

Nach Erreichen der Gewinnstufe von 64 000 € steht der 50-50-Joker zur Verfügung, der nur einmal verwendet werden darf. Bei diesem werden zufällig zwei falsche Antworten entfernt, so dass man sich nur noch zwischen zwei Antworten entscheiden muss.

b) Ein Kandidat kann bei einer Frage die erste Antwort mit 100 %iger Sicherheit ausschließen.

Wie groß ist die W'keit, dass nach Verwendung des 50-50-Jokers diese falsche Antwort stehen bleibt?

c) Ein Kandidat, der die 64 000-Euro-Frage richtig beantwortet hat, überlegt, ob er den Joker entweder bei der nächsten oder erst bei der letzten Frage einsetzen soll.

Berechnen Sie für diese beiden Möglichkeiten jeweils die W'keiten dafür, dass der Kandidat durch reines Raten mit genau 64000 €, mit genau 128000 € bzw. mit dem Höchstgewinn nach Hause geht.

---

4. In den vergangenen Jahren haben insgesamt 585 Personen, von denen 315 weiblich waren, bei der Quizshow mitgespielt. 90 Personen haben einen Gewinn von mindestens 128000 € erzielt, davon waren 40 weiblich.

a) Mit welcher W'keit ist eine zufällig aus den 585 Kandidaten ausgewählte Person männlich und hat mindestens 128000 € gewonnen?

b) Untersuchen Sie die Ereignisse "Eine zufällig ausgewählte Person ist männlich" und "Eine zufällig ausgewählte Person hat mindestens 128 000 € gewonnen" auf stochastische Unabhängigkeit.

---

5. Für die Abschätzung der Zuschauerquote werden 200 repräsentativ ermittelte Personen befragt. Sollten weniger als 25% davon die Quizshow gesehen haben, so soll diese abgesetzt werden.

Berechnen Sie die W'keit dafür, dass die Quizshow abgesetzt wird, obwohl in Wirklichkeit die Zuschauerquote bei 30 % liegt.

Lösung

1.a) $P\left(X=10\right) = B\left(12;\,0{,}95;\,10\right) = \binom{12}{10}\cdot 0{,}95^{10}\cdot 0{,}05^{2} \approx 9{,}9\%$

b) $P\left(X \le 9\right) = F_{0{,}95}^{12} = 1 - P\left(X \ge 10\right) = 1 - \sum_{i=10}^{12} B\left(12;\,0{,}95,\,i\right) \approx 2{,}0\%$

---

2. Es gibt 4! verschiedene Reeihenfolgen. Nur eine ist richtig.

$P(E) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$

3.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
125	250	500	1000	2000	4000	8000	16000	32000	64000	128000	256000

a) $P(A) = \left(\frac{1}{4}\right)^{5} = \frac{1}{1024} \approx 0{,}1\%$

b) $P(B) = \frac{1}{3}$

Die richtige und eine falsche Antwort bliben stehen.

c) Joker bei der 128000 €-Frage:

Gewinn	64000 €	128000 €	256000 €
W'keit	0,5	0,375	0,125

Joker bei der 256000 €-Frage:

Gewinn	64000 €	128000 €	256000 €
W'keit	0,75	0,125	0,125

4.

	F	**M**	
G	40	50	90
K	275	220	495
	315	270	585

a) $P(M \cap G) = \frac{50}{585} = \frac{10}{117}$

b) $P(M) = \frac{270}{585}$ und $P(G) = \frac{90}{585} = \frac{2}{13}$ und damit $P(M) \cdot P(G) \neq P(M \cap G)$

---

5. $P\left(X \leq 49\right) = F_{0,30}^{200}\left(49\right) \approx 5{,}1\%$

Grundkursabitur 2008	**Stochastik**	**Aufgabe III**

Bei der neuen Fernsehshow "Insel-Camp" nehmen 7 Frauen und 7 Männer als Kandidaten teil.

1. Für die Fahrt zur Insel stehen drei Boote zur Verfügung, eines für 8, eines für 4 und eines für 2 Personen.

a) Wie viele verschiedene ***Möglichkeiten*** *gibt es, die 14 Kandidaten so aufzuteilen, dass je-*

des der drei Boote voll besetzt ist ?

b) Die Zuschauer haben aus den Kandidaten Judith für das 8er-Boot, Sabine für das 4er-Boot und Laura für das 2er-Boot als Bootsführer bestimmt.

Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die drei Bootsmannschaften für die gemeinsame Fahrt zur Insel zu vervollständigen, wenn in jedem Boot gleich viele Männer und Frauen sitzen sollen ?

---

2. Beim Spiel "Schatzsuche" muss ein Kandidat abgesperrte Truhen öffnen. Bei jeder Truhe stehen dafür 6 sehr ähnliche, aber dennoch verschiedene Schlüssel zur Auswahl, von denen 4 nicht zum Schloss passen.

Mit jedem einzelnen der beiden anderen Schlüssel lässt sich das Schloss entriegeln. Pro Truhe darf der Kandidat 2 verschiedene Schlüssel ausprobieren, die er zufällig auswählt.

a) Bestätigen Sie ***mit Hilfe eines Baumdiagramms****, dass bei einer Truhe die W'keit für das Öffnen 60% beträgt.*

b) Wie viele Truhen müssen in diesem Spiel ***mindestens*** *zur Verfügung gestellt werden, damit mit einer W'keit von mehr als 99,9%* ***wenigstens*** *eine Truhe geöffnet wird ?*

c) Bestimmen Sie die W'keit folgender Ereignisse :

A : Von 15 Truhen werden genau 7 geöffnet

B : Von 15 Truhen werden mehr als 10 geöffnet

---

3. Beim Spiel "Perlentauchen" darf ein Kandidat eine von 300 Muscheln öffnen.

55% der Muscheln sind außen golden gefärbt, der Rest ist außen schwarz. In 24% aller Muscheln ist eine Perle enthalten, die übrigen sind leer. 32% der Muscheln sind weder goldfarben, noch enthalten sie eine Perle.

a) Wie viele goldfarbene Muscheln enthalten keine Perle ?

b) Eine Muschel wird zufällig ausgewählt.

Untersuchen Sie, ob die Ereignisse "goldfarben" und "enthält Perle" ***stochastisch unabhängig*** sind.

c) Ist es für Kandidaten aussichtsreicher, eine goldene oder eine Schwarze Muschel zu öffnen, um eine Perle zu finden ?

Begründen Sie ihre Antwort durch Rechnung.

---

4. Der Produzent will eine Fortsetzung der Fernsehshow nur dann finanzieren, wenn mehr als 75% der "Insel-Camp"-Zuschauer dies befürworten. Die Entscheidung für oder gegen eine Fortsetzung soll mit Hilfe einer Umfrage unter 200 zufällig ausgewählten Zuschauern dieser Sendung gefällt werden.

Die W'keit, dass die Sendung irrtümlich fortgesetzt wird, soll höchstens 5% betragen.

Geben Sie die zugehörige ***Entscheidungsregel*** an, bei der zugleich die W'keit für ein irrtümliches Absetzen möglichst klein ist.

Lösung

1. a) Es gibt $\binom{14}{8}\cdot\binom{6}{4}\cdot\binom{2}{2}$ Möglichkeiten.

b) Es gibt $\binom{4}{3}\cdot\binom{7}{4}\cdot\binom{1}{1}\cdot\binom{3}{2}$ Möglichkeiten.

---

2. a) $P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} = 60\%$

b) $P(X \geq 1) > 0{,}999 \quad \Leftrightarrow \quad P(X=0) < 0{,}001 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}4^n < 0{,}001 \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}4}$

$\Rightarrow \quad n \geq 8$

c) $P(A) = P(X=7) = B(15; 7; 0{,}6) = \binom{15}{7}\cdot 0{,}6^7\cdot 0{,}4^8 \approx 11{,}8\%$

$P(B) = P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - F_{0,6}^{15}(10) \approx 21{,}7$

---

3. a)

	G	$\overline{G}$	
P	0,11	0,13	0,24
$\overline{P}$	0,44	0,32	0,76
	0,55	0,45	1

$\frac{4}{5}\cdot 0{,}55\cdot 300 = 132$

b) $P(G \cap P) = 0{,}11$

$P(G)\cdot P(P) = 0{,}55\cdot 0{,}24 = 0{,}132$

G und P sind voneinander abhängig.

c) $\frac{0{,}13}{0{,}45} = \frac{13}{45} > \frac{1}{5}$ und $\frac{0{,}11}{0{,}55} = \frac{1}{5}$

Es ist aussichtreicher eine schwarze Muschel zu öffnen.

---

4. $H_0 : p \leq p_0 = 0{,}75$

$H_1 : p > p_0 = 0{,}75$

$\mathbb{A} = \{0, ..., k\}$ und $\overline{\mathbb{A}} = \{k+1, ..., 200\}$

Bedingung : $\alpha = P(X \in \overline{\mathbb{A}}) \leq 0{,}05$ ergibt $k = 160$.

Nur wenn mehr als 160 Zuschauer die Sendung befürworten, wird sie nicht abgesetzt.

Grundkursabitur 2008	Stochastik	Aufgabe IV

Eine neue Limonade "BioFrucht" erobert den Getränkemarkt. BioFrucht wird in vier Sorten hergestellt :

Apfel (A), Brombeere (B), Citro (C) und Dattel (D).

1. *Der Hersteller von BioFrucht hält eine Werbekampagne für unnötig, weil er vermutet, dass der Bekanntheitsgrad p seiner Limonade mindestens 40% beträgt.*

   Um dies zu überprüfen, werden zufällig 200 ausgewählte Personen befragt. Der Hersteller will von seiner Vermutung $p \geq 0{,}4$ *abrücken und eine Werbekampagne bei kostenlosen Getränkeproben starten, wenn bei der* ***Umfrage*** *weniger als 70 Personen angeben, BioFrucht zu kennen.*

a) Wie groß muss die W'keit dafür, dass keine Getränkeproben verteilt werden, obwohl der Bekanntheitsgrad von BioFrucht tatsächlich nur 30% beträgt ?

b) Bestimmen Sie die maximale W'keit dafür, dass der Hersteller unnötigerweise Getränkeproben verteilt ?

---

2. In einer Stadt wird die Werbekampagne durchgeführt. Dabei werden an einen Werbestand in der Fußgängerzone gemischte BioFrucht-Getränkekästen angeliefert, die je 5 Flaschen der Sorten A, B, C und D enthalten.

Ein Mitarbeiter der Herstellerfirma entnimmt rein zufällig 5 Flaschen aus einem zunächst vollen Kasten und verteilt diese an Passanten.

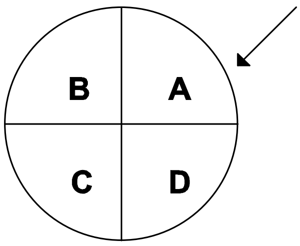
Wie groß ist die W'keit dafür, dass er

a) zweimal Sorte A, zweimal Sorte B und einmal Sorte D entnommen hat ?

b) von jeder Sorte mindestens eine Flasche entnommen hat ?

---

3. Als weiter Teil der Werbekampagne wird in der Fußgängerzone ein Glücksrad mit 4 gleich großen Sektoren aufgebaut.



Dreht ein Passant das Glücksrad, so bekommt er eine Flasche BioFrucht der angezeigten Sorte geschenkt.

100 Personen drehen nacheinander je einmal das Glücksrad.

a) Bestimmen Sie die W'keiten folgender Ereignisse

E : Genau 3 Personen erhalten je eine Flasche der Sorte D.

F : Mindestens 3 Personen erhalten eine Flasche der Sorte D.

G : 3 aufeinander folgende Personen erhalten eine Flasche der Sorte D, die restlichen Personen erhalten Flaschen anderer Sorten.

*b) Wie oft muss das Glücksrad insgesamt gedreht werden, damit mit einer W'keit von mehr als 95% **mindestens** eine Flasche der Sorte C verschenkt wird ?*

---

4. Um den Beliebtheitsgrad der einzelnen Sorten herauszufinden, wurde eine bayernweite Befragung durchgeführt. Dabei erhielt man unter den Personen, die eine Lieblingssorte angeben konnten, folgendes Ergebnis :

Lieblingssorte	A	B	C	D
Häufigkeit der Nennung	12%	18%	28%	42%

a) 204 Personen gaben als Lieblingssorte Apfel an.

Wie viele Personen nannten Dattel als Lieblingssorte ?

b) Im Folgenden werden nur die befragten Personen betrachtet, die eine Lieblingssorte angegeben haben. Unterscheidet man diese Personen nach ihrem Geschlecht, so ergibt sich folgendes Bild :

10% sind weiblich und haben Dattel als Lieblingssorte, 25% sind männlich und haben eine andere Lieblingssorte als Dattel.

Untersuchen Sie die beiden Ereignisse "Eine zufällige ausgewählte Person hat die Lieblingsorte Dattel" und "Eine zufällige ausgewählte Person ist männlich" auf ***stochastischeUnabhängigkeit****.*

Lösung

1. $H_0 : p \geq p_0 = 0{,}4$

$H_1 : p < p_0 = 0{,}4$

$\mathbb{A} = \left\{70, ..., 200\right\}$ und $\overline{\mathbb{A}} = \left\{0, ..., 69\right\}$

a) $\beta = P(X \in \overline{\mathbb{A}}) = P(X \geq 70) = 1 - P(X \leq 69) = 1 - F_{0,30}^{200}(69) \approx 7{,}3\%$

b) $P(X \in \mathbb{A}) = P(X \leq 79) = F_{0,40}^{200}(69) \approx 6{,}4\%$

---

2. a) ***Kombinatorische Lösung***

1. $|\Omega| = \binom{20}{5} = 15504$ 2. $|A| = \binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1} = 500$

3. $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1250}{3876} \approx 3{,}2\%$

b) 2. $|B| = 4 \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{5}{1} = 5000 \quad \Rightarrow \quad P(B) = \frac{5000}{15504} \approx 32{,}2\%$

Lösung mit Baumdiagrammen und Kombinatorik

a) $P(AABBD) = \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{5}{18} \cdot \frac{4}{17} \cdot \frac{5}{16} = \frac{25}{23256}$

Anzahl der Pfade: $\frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = 30$

$P(A) = 30 \cdot \frac{24}{233576} = \frac{125}{3876}$

b) Analog ergibt sich $P(B) = 4 \cdot 60 \cdot \frac{5}{20} \cdot \frac{5}{19} \cdot \frac{5}{18} \cdot \frac{5}{17} \cdot \frac{4}{16} \approx 32{,}2\%$

---

3. a) $P(E) = P(X = 3) = B(10; 3; 0{,}25) \approx 25\%$

$P(F) = P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F_{0,25}^{10}(2) \approx 47{,}4\%$

$P(G) = 8 \cdot 0{,}75^7 \cdot 0{,}25^3 \approx 1{,}7\%$

b) $n > \frac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}75} \quad \Rightarrow \quad n \geq 11$

---

4. a) $\frac{204}{12} \cdot 42 = 714$

b)

	W	M	
D	0,10	0,32	0,42
$\overline{D}$	0,33	0,25	0,58
	0,43	0,57	1

$P(M \cap D) = 0{,}32$ und $P(M) \cdot P(D) = 0{,}57 \cdot 0{,}42 = 0{,}2394$

d.h. die Ereignisse sind voneinander abhängig.

Grundkursabitur 2009	**Stochastik**	**Aufgabe IV**

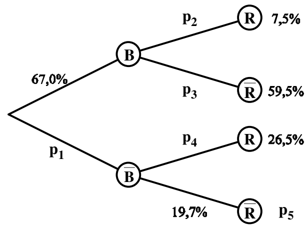
In den Jahren 2005, 2006 und 2007 wurde jeweils eine repräsentative Umfrage unter 2000 Menschen in Deutschland zum Thema "Rauchverbot in Restaurants" durchgeführt. Im Jahr 2007 haben dabei 67,0 % ein Rauchverbot befürwortet.

1. Die Anzahl der Befürworter des Rauchverbots unter den Befragten ist im Jahr 2007 im Vergleich zum Jahr 2006 um 160 Personen, im Vergleich zum Jahr 2005 um 280 Personen größer.

Berechnen Sie den prozentualen Anteil der Befürworter des Rauchverbots in den Jahren 2005 und 2006.

---

2. Aus den Befragten des Jahres 2007 wird eine Person zufällig ausgewählt. Dabei werden die Ereignisse



B: Die Person befürwortet ein Rauchverbot in Restaurants

und

R : Die Person ist Raucher

betrachtet (vgl. auch nebenstehendes Baumdiagramm).

a) Beschreiben Sie das Ereignis in Worten, dessen W'keit im obigen ***Baumdiagramm*** *mit 7,5% angegeben ist.*

Berechnen Sie die W'keiten p_1, p_2, p_3, p_4 *und* p_5 *aus obigem Baumdiagramm in Prozent auf eine Nachkommastelle genau.*

c) Begründen Sie mit Hilfe entsprechender W'keiten, dass die Ereignisse B und R stochastisch abhängig sind.

d) Bei welcher der folgenden Zahlen kann es es sich um die Anzahl der Raucher unter den befragten Personen hande ? Begründen Sie Ihre Antwort.

150	530	680	1340

e) Wie viel Prozent der Raucher haben das Rauchverbot befürwortet ?

---

3. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass in der Bevölkerung 67% das Rauchverbot in Restaurants befürworten.

a) Wie groß ist die W'keit dafür, dass sich unter 12 zufällig a. sgewählten Personen höchstens 10 Befürworter befinden ?

b) Wie viele Personen müssen mindestens zufällig ausgewählt werden, damit ich mit einer W'keit von mehr als 99 % wenigstens ein Be worter darunter befindet ?

---

4. *Es wird angezweifelt, dass der Anteil der Befürworter des Rauchverbots derzeit noch 67% beträgt. Vielmehr wird vermutet, dass der Prozentsatz gegenwärtig höchstens bei 60% liegt. Um diese Vermutung zu testen, wird eine Befragen; von 100 zufällig ausgewählten Personen durchgeführt.*

   Wie muss die ***Entscheidungsregel*** *mit einem möglichst großen* ***Ablehnungsbereich*** *lauten, wenn die Vermutung mit einer W'keit von höchstens 5% irrtümlich abgelehnt werden soll ?*

---

5. *Die SMV eines Gymnasiums , ächte den Anteil der Raucherinnen unter den Schülerinnen der Mittelstufe an der eigenen Schule ermitteln. Sie führt deshalb eine Befragung durch.*

   Dabei wird die so genannte Dunkel- Feldmethode verwendet, die durch ne Anonymisierung der Daten ehrliche Antworten gewährleisten soll.

   Bei dieser Methode zieht die Befragte fällig eine der drei abgebildeten, verdeckt liegenden Karten und beantwortet die Frage wahrheitsgemäß mit "Ja" oder "Nein".

   Der Interviewer notiert nurdiese Antwort, ohne.zu wissen, welche Karte jeweils gezogen wurde.

   Von 357 auf diese Weise befragten Mädchen haben 138 mit "Ja" geantwortet. Bestimmen Sie den Schätzwert für den Anteil d Raucherinnen unter den Schülerinnen, der sich aus diesen Angaben herleiten lässt.

Lösung

1. 67% von $2000 = 1340$

$2006: 1340 - 160 = 1180 \quad \frac{1180}{2000} = 59\%$

$2005: 1340 - 280 = 1060 \quad \frac{1060}{2000} = 53\%$

---

2. a) E : Die Person ist Raucher und befürwortet das Rauchverbot in Restaurants.

b) $p_1 = 1 - 0{,}670 = 0{,}330 = 33{,}0\%$

$0{,}67 \cdot p_2 = 0{,}075 \quad \Rightarrow \quad p_2 = 11{,}2\%$

$p_3 = 1 - p_2 = 88{,}8\%$

$p_4 = 1 - 0{,}197 = 80{,}3\%$

$p_5 = 0{,}33 \cdot 0{,}197 = 6{,}5\%$

c) $P(B) = 0{,}67 \quad P(R) = 0{,}075 + 0{,}265 = 0{,}34 \quad \Rightarrow \quad P(B) \cdot P(R) = 0{,}2278$

$P(B \cap R) = 0{,}075$

Damit sind die Ereignisse B und R voneinander abhängig.

d) $(0{,}075 + 0{,}265) \cdot 2000 = 680$

e) $\frac{0{,}075}{0{,}34} \approx 0{,}22$

Etwa 22% der Raucher haben das Rauchverbot befürwortet.

---

3. a) $P(X \le 10) = 1 - P(X \ge 11) = 1 - \binom{12}{11} \cdot 0{,}67^{11} \cdot 0{,}33 - \binom{12}{12} \cdot 0{,}67^{12} \approx 94{,}4\%$

b) $P(X \ge 1) > 0{,}99 \quad \Leftrightarrow \quad P(X = 0) < 0{,}01 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}33^n < 0{,}01$

$\Leftrightarrow \quad n \cdot \ln 0{,}33 < 0{,}01 \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}33} \approx 4{,}15$

Emüssen mindestens 5 Personen befragt werden.

---

4. *Nullhypothese* H_0: $p \le 0{,}60$ *Annahmebereich*: $\mathbb{A} = \left\{0;\ 1;\ ....;\ k\right\}$

Gegenhypothese H_1: $p = 0{,}67$ *Ablehnungsbereich*: $\overline{\mathbb{A}} = \left\{k+1;\ ....;\ 200\right\}$

Bedingung:

$$\alpha = P\left(X \in \overline{\mathbb{A}}\right) = P\left(X \ge k+1\right) = 1 - P\left(X \le k\right) = 1 - F_{0,60}^{100}(k) \le 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad k = 68$$

Man lehnt die Vermutung ab, wenn mindestens 69 Personen das Rauchverbot befürworten.

---

5. Die Person antwortet mit ja, wenn die die Karte mit dem Kreis erhält oder wenn die Person ein Rauer ist die rechte Karte erhält. Also

$$\left[\frac{2}{3}\cdot p + \frac{1}{3}\cdot(1-p)\right]\cdot 357 = 138 \quad \Rightarrow \quad p \approx 0{,}16$$

Leistungskursabitur 2006	Stochastik	Aufgabe IV

Die Firma VEGAS hat ein neues Gesellschaftsspiel entwickelt, bei dem neben Laplace-Würfeln auch spezielle Vegas-Würfel verwendet werden, die sich äußerlich von den Laplace-Würfeln nicht unterscheiden. Die Vegas-Würfel zeigen die Augen-zahl 6 mit der erhöhten W'keit $\frac{1}{3}$*, während die anderen Augenzahlen untereinander gleich wahrscheinlich sind.*

1. Zeigen Sie, dass der Erwartungswert der Zufallsgröße

X . Augenzahl beim einmaligen Werfen eines Vegas-Würfels

gleich 4 ist.

---

2. Auf dem Tisch liegen ungeordnet drei Laplace-Würfel und ein Vegas-Würfel. Ein Spie ler nimmt davon zufällig drei Würfel und wirft sie gleichzeitig.

Mit welcher W'keit erzielt er drei gleiche Augenzahlen, wenn er drei Laplace-Würfel ge nommen hat ?

Mit welcher W'keit erzielt er drei gleiche Augenzahlen, wenn er zwei Laplace-Würfel und den Vegas-Würfel genommen hat ?

Welche Folgerung können Sie aus Ihren Ergebnissen bezüglich der stochastischen Ab-hängigkeit der Ereignisse

A : Er erzielt drei gleiche Augenzahlen und

B : Er nimmt drei Laplace-Würfel

ziehen ?

---

3. Um bei einem Würfel festzustellen, ob es sich um einen Laplace- oder Vegas-Würfel handelt, wird er 100-mal geworfen. Ein Vegas-Würfel soll mit einer W'keit von mindes-tens 99 % als solcher eingestuft werden.

a) Bestimmen Sie hierzu die Entscheidungsregel anhand der Anzahl der geworfenen Sechser so, dass möglichst auch ein Laplace-Würfel richtig eingestuft wird.

b) Mit welcher W'keit wird bei dieser Entscheidungsregel ein Laplace-Würfel falsch ein-gestuft?

Eine Packung des Spiels enthält - ungeordnet und äußerlich nicht unterscheidbar - 7 La-place- und 3 Vegas-Würfel.

4. Aus dieser Packung wird ein Würfel entnommen und 100-mal geworfen.

Mit welcherW'keit handelt es sich um einen Vegas-Würfel, wenn dabei 25-mal eine 6 geworfen wird ?

Lösung

1. Wahrscheinlichkeitsverteilung

x	1	2	3	4	5	6
$P\left(X=x\right)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$

$E(X) = \frac{2}{15}\cdot(1+2+3+4+5)+\frac{1}{3}\cdot 6 = 4$

---

2. $P\left(E \mid L\right) = 6\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ bzw. $P\left(E \mid V\right) = 5\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{15} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{54}+\frac{1}{108} = \frac{1}{36}$

Die Ereignisse sind voneinander unabhängig.

---

3. a) Nullhypothese : $p = p_0 = \frac{2}{3}$

Gegenhypothese : $p = p_1 = \frac{1}{6}$

Annahmebereich : $\mathbb{A} = \left\{k+1; ....; 100\right\}$ Ablehnungsbereich : $\overline{\mathbb{A}} = \left\{0; 1; 2; ....; k\right\}$

Bedingung : $P\left(X \in \mathbb{A}\right) \geq 0{,}99 \quad\Leftrightarrow\quad P\left(X \leq k\right) \leq 0{,}01 \quad\Leftrightarrow\quad F^{100}_{\frac{1}{3}}(k) \leq 0{,}01$

$\Rightarrow \quad k = 22$

$\mathbb{A} = \left\{23; ...; 100\right\}$ und $\overline{\mathbb{A}} = \left\{0; ....; 22\right\}$

b) $P\left(X \geq 23\right) = 1-P\left(X \leq 22\right) = 1-F^{100}_{\frac{1}{6}}(22) = 1-0{,}93695 \approx 6{,}3\%$

---

4. $$P\left(V \mid E\right) = \frac{P\left(V\cap E\right)}{P(E)} = \frac{\frac{3}{10}\cdot B\left(100;\ \frac{1}{3};\ 25\right)}{\frac{3}{10}\cdot B\left(100;\ \frac{1}{3};\ 25\right)+\frac{7}{10}\cdot B\left(100;\ \frac{1}{6};\ 25\right)} = 43{,}7\%$$

---

1. In einer Gemeinschaftspraxis von Augenärzten ergab eine mehrjährige Auswertung der Patientenkartei, dass im Durchschnitt jeder 15. Patient an Grauem Star leidet.

   a) Im Laufe eines Vormittags rufen unabhängig voneinander 15 Personen an und bitten um einen Termin. Mit welcher W'keit hat genau eine dieser Personen Grauen Star ?

   b) Wie viele Personen müssen unabhängig voneinander um einen Termin bitten, damit mit einer W'keit von mehr als 90% mindestens einer darunter ist, der an Grauem Star leidet ?

---

2. Der Pharmakonzern Medicash forscht nach einem neuen Medikament. Es stehen 6 verschiedene Wirkstoffe zur Auswahl.

   Im Labor werden Testsubstanzen aus mindestens zwei Wirkstoffen gemischt, wobei von jedem beteiligten Wirkstoff jeweils genau ein Milligramm enthalten sein soll.

   Wie viele verschiedene Wirkstoffkombinationen sind möglich?

---

3. Ein Labor entwickelt einen neuen Impfstoff und testet ihn in einem Tierversuch mit 200 Mäusen. Mit dem Impfstoff werden nur dann klinische Studien durchgeführt, wenn sich dabei in weniger als 5% der Fälle unerwünschte Nebenwirkungen zeigen.

   Bestimmen Sie für die Nullhypothese $H_0 : p \geq 0{,}05$ die Entscheidungsregel für den Test mit 200 Mäusen auf dem Signifikanzniveau von 1%.

---

4. *Ein Anteil* $p \in \,]0; 1[$ *von Patienten leidet an der Infektion durch den M-Virus. Der Nachweis dieser Krankheit durch einen Bluttest ist nicht zuverlässig.*

   Falls jemand vom M-Virus befallen ist, dann diagnostiziert der Bluttest dies nur mit einer W' von 90%. Falls jemand nicht infiziert ist, dann diagnostiziert der Bluttest in 5% aller Fälle trotz-dem eine M-Virusinfektion.

   Zeigen Sie, dass die W'keit, dass eine Person tatsächlich infiziert ist, falls der Bluttest dies diagnostiziert, beträgt $\frac{90p}{85p+5}$.

   Für welche Werte von p ist diese W'keit größer als 90%?

---

5. *In einer Spezialklinik hält sich jeder Patient (unabhängig von anderen Patienten) mindestens 3 Tage, höchstens aber 5 Tage auf.*

   Die Verwaltung legt für die Aufenthaltsdauer X eines Patienten in Tagen folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung zugrunde:

k	3	4	5
$P(X=k)$	60%	10%	30%

   Jeder Patient zahlt für die Aufnahme 110€ Verwaltungsgebühr und 450 € pro Aufenthaltstag.

Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsgröße

Y: Einnahmen pro Patient (in €).

Lösung

1. a) $P\left(X=1\right) = \binom{15}{1}\cdot\left(\frac{1}{15}\right)^{1}\cdot\left(\frac{14}{15}\right)^{14} \approx 38{,}1\%$

b) Bedingung : $P\left(X \ge 1\right) > 0{,}90 \quad \Leftrightarrow \quad P\left(X=0\right) < 0{,}10 \quad \Leftrightarrow \quad B\left(n;\frac{1}{15};0\right) < 0{,}02$

$$\left(\frac{14}{15}\right)^{n} < 0{,}10 \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{\ln 0{,}1}{\ln\frac{14}{15}} \quad \Rightarrow \quad n \ge 34$$

---

2. $\binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 57$

---

3. Nullhypothese : $p \ge p_0 = 0{,}02$

Gegenhypothese : $p < p_0 = 0{,}02$

Annahmebereich : $\mathbb{A} = \left\{k+1; ....; 200\right\}$ Ablehnungsbereich : $\overline{\mathbb{A}} = \left\{0; 1; 2; ....; k\right\}$

Bedingung :

$$\alpha = P\left(X \in \overline{\mathbb{A}}\right) \le 0{,}01 \quad \Leftrightarrow \quad P\left((X \le k\right) \le 0{,}01 \quad \Leftrightarrow \quad F_{0,05}^{200}(k) \le 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad k = 3$$

$\mathbb{A} = \left\{4; ...; 200\right\}$ und $\overline{\mathbb{A}} = \left\{0; ....; 3\right\}$

Man führt die klinischen Studien durch, wenn höchsten 3 Mäuse Nebenwirkungen zeigen.

---

4. Gegeben : $P(M) = p$, $P(I\,|\,M) = 0{,}9$ und $P(I\,|\,\overline{M}) = 0{,}05$

$$P(M\,|\,I) = \frac{P(M \cap I)}{P(I)} = \frac{0{,}9p}{0{,}9p + 0{,}05\cdot(1-p)} = \frac{90p}{85p+5}$$

Bedingung : $\frac{90p}{85p+5} > 0{,}9 \quad \Leftrightarrow \quad 90p > 76{,}5p + 4{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad 13{,}5p > 4{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad p > \frac{1}{3}$

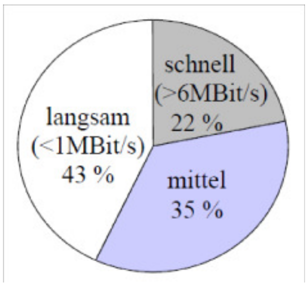
5. $E(Y') = 0{,}6\cdot 1350 + 0{,}1\cdot 1800 + 0{,}3\cdot 2250 = 1665 \quad \Rightarrow \quad Y = 1775$

$$Var(Y) = 0{,}6\cdot 1350^2 + 0{,}1\cdot 1800^2 + 0{,}3\cdot 2250^2 - 1665^2 = 164025 \quad \Rightarrow \quad \sigma = 405\left(€\right)$$

---

j-Leistungskursabitur 2008	Stochastik	Aufgabe III

In einer Region haben 60% der Haushalte einen Internetanschluss. Das Diagramm veranschaulicht die Anteile der Zugangsgeschwindigkeiten unter den Haushalten mit Internetanschluss in dieser Region.



Im Auftrag eines Providers (Internetdienstanbieters) wird unter allen Haushalten dieser Region eine Umfrage zur Nutzung des Internets durchgeführt.

1. Zunächst werden 25 Haushalte der Region zufällig ausgewählt.

a) Wie groß ist die W'keit, dass weniger als die Hälfte der ausgewählten Haushalte einen Internetanschluss besitzt ?

b) Wie groß ist die W'keit, dass von den ausgewählten Haushalten mindestens zwei einen schnellen Internetzugang besitzen?

Tatsächlich lassen sich die 25 ausgewählten Haushalte wie in der Tabelle angegeben in vier Gruppen einteilen.

kein Internet	*langsam*	*mittel*	*schnell*
9	*7*	*5*	*4*

Als Dank für die Teilnahme an der Umfrage werden drei Preise unter den 25 Umfrageteilnehmern verlost, wobei jeder Haushalt höchstens einen Preis erhalten kann.

c) Mit welcher W'keit fallen nicht alle drei Preise an Haushalte mit Internetanschluss?

d) Mit welcher W'keit erhält eine der vier Gruppen alle drei Preise?

---

2. Wie viele Haushalte dieser Region müssen mindestens zufällig ausgewählt werden, damit sich mit einer W'keit von mehr als 99 % wenigstens ein Haushalt mit schnellem Internetzugang darunter befindet?

---

3. Der Provider beabsichtigt, in dieser Region eine Werbekampagne durchzuführen, da er vermutet, dass höchstens 40 % der Haushalte mit langsamem Internetzugang wissen, dass ein schnellerer Zugang technisch möglich ist.

Um diese Vermutung zu testen, werden 50 Haushalte mit langsamem Internetzugang zufällig ausgewählt und befragt.

Der Provider möchte möglichst vermeiden, dass die Werbekampagne aufgrund des Testergebnisses irrtümlich unterlassen wird.

Geben Sie die hierfür geeignete Nullhypothese an und ermitteln Sie die zugehörige Entscheidungsregel auf einem Signifikanzniveau von 5%.

---

4. Durch eine telefonische Befragung von Haushalten ohne Internetanschluss untersucht der Provider, inwiefern die finanzielle Situation der Grund für den Verzicht auf das Internet ist.

Damit die angerufenen Personen bei diesem sensiblen Thema wahrheitsgemäß antworten, wird ein zweischrittiges Verfahren angewandt, das dem Interviewer die finanzielle Situation des einzelnen Befragten nicht offenlegt.

Dies wird den angerufenen Personen zunächst erläutert.

Im ersten Schritt des Verfahrens wird die angerufene Person gebeten, zweimal eine Münze zu werfen, sich das Ergebnis zu merken, es aber nicht dem Interviewer mitzuteilen.

In einem zweiten Schritt werden der Person zwei Fragen A und B vorgelesen. Wurde zweimal Zahl geworfen, so ist im Anschluss die Antwort zu Frage A zu nennen, andernfalls die Antwort zu Frage B. Dabei wird dem Interviewer nur "ja" oder "nein" als Antwort weitergegeben.

Frage A: "Spielen ausschließlich finanzielle Gründe eine Rolle bei Ihrem bisherigen Verzicht auf einen Internetanschluss?“

Frage B: "Spielen nicht-finanzielle Gründe eine Rolle bei Ihrem bisherigen Verzicht auf einen Internetanschluss ?"

Von den befragten Haushalten antworteten 68 % mit "ja". Daraus ermittelt der Provider einen Schätzwert p für den Anteil der Haushalte, die ausschließlich aus finanziellen Gründen keinen Internetanschluss haben, unter allen befragten Haushalten.

Bestimmen Sie den Schätzwert p mit Hilfe eines Baumdiagramms

---

5. Der Provider bietet seinen Kunden die beiden folgenden Tarife an:

FLAT: Zeitlich unbegrenzte Internetnutzung für monatlich 35 €.

TIME: Monatlich 10,50 € für bis zu 20 Stunden Internetnutzung im Monat, zuzüglich 1,40 € für jede weitere angefangene Stunde.

Entscheiden Sie, welcher der beiden Tarife in einem Monat mit einer Nutzungsdauer von 37 Stunden 15 Minuten günstiger ist.

Lösung

1. a) $P\left(X \le 2\right) = F_{0,6}^{25}(12) \approx 15{,}4\%$

b) $p = 0{,}6 \cdot 0{,}22 = 0{,}132$

$P\left(X \ge 2\right) = 1 - P\left(X \le 1\right) = 1 - B\left(25;\, 0{,}132;\, 0\right) - B\left(25;\, 0{,}132;\, 1\right) \approx 86{,}1\%$

c) $P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \dfrac{\binom{16}{3}}{\binom{25}{3}} \approx 75{,}7\%$

d) $P(E) = \dfrac{\binom{9}{3} + \binom{7}{3} + \binom{5}{3} + \binom{4}{3}}{\binom{25}{3}} \approx 5{,}8\%$

---

2. $P\left(X \ge 1\right) > 0{,}99 \quad \Leftrightarrow \quad P\left(X = 0\right) < 0{,}01 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}868^n < 0{,}01 \quad \Leftrightarrow \quad n > \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}868} \qquad n = 33$

---

3. Nullhypothese H_0: $p \le 0{,}40$ Annahmebereich: $\mathbb{A} = \left\{0;\, ...;\, k\right\}$

Gegenhypothese H_1: $p > 0{,}40$ Ablehnungsbereich: $\overline{\mathbb{A}} = \left\{k+1;\, ...;\, 50\right\}$

Bedingung:

$\alpha = P\left(X \ge k+1\right) = 1 - P\left(X \le k\right) \le 0{,}05 \quad \Leftrightarrow \quad P\left(X \le k\right) \ge 0{,}95 \quad \Leftrightarrow \quad F_{0,4}^{50}(k) \ge 0{,}95$

$\Rightarrow \quad k = 26$

---

4. $p \cdot \dfrac{1}{4} + (1-p) \cdot \dfrac{3}{4} = 0{,}68 \quad \Leftrightarrow \quad p = 0{,}14$

---

5. 10,50 € + 18 · 1,40 € = 35,70 € > 35 €

Leistungsabitur 2008	Stochastik	Aufgabe IV

In einem Molkereibetrieb wird Fruchtjoghurt hergestellt und in Becher abgefüllt.

1. Einer Handelskette wurde vertraglich zugesichert, dass maximal 1 % der Becher einen defekten Deckel besitzen. Normalerweise kann dieser Qualitätsstandard leicht eingehalten werden.

   Eines Tages stellt sich bei einer Qualitätskontrolle in der Molkerei heraus, dass 4% der Joghurtbecher einen defekten Deckel aufweisen. Bei einem schon beladenen Lkw ist ungewiss, ob die Joghurtbecher bereits aus der Produktion mit dem erhöhten Anteil an defekten Deckeln stammen. Deshalb wird der Ladung eine Stichprobe entnommen und untersucht.

   a) Falls bei einer Stichprobe aus 100 Bechern mindestens zwei Becher einen defekten Deckel haben, wird der Lkw in der Molkerei wieder entladen, andernfalls wird die Lieferung freigegeben.

      Wie groß ist die W'keit, dass die Lieferung freigegeben wird, obwohl sie einen erhöhten Anteil an Joghurtbechern mit defektem Deckel aufweist?

      Wie groß kann die W'keit für ein unnötiges Entladen des Lkws bei Einhaltung des zuge sicherten Qualitätsstandards maximal werden ?

   b) Um das Risiko einer fälschlichen Auslieferung noch kleiner zu machen, soll die Lieferung nur dann freigegeben werden, wenn sich kein defekter Deckel in einer Stichprobe der Länge n befindet.

      Bestimmen Sie n so, dass dieses Risiko nach der neuen Regel höchstens 1% beträgt

---

In dem Molkereibetrieb werden täglich gleich viele Becher der Sorten Erdbeere, Kirsche, Heidelbeere und Ananas abgefüllt. Für jede Sorte gibt es eine eigene Abfüllmaschine.

2. *Bei einer Tagesproduktion, bei der erneut insgesamt 4% der Becher einen defekten Deckel aufweisen, fällt auf, dass unter den Erdbeerjoghurtbechern sogar jeder zehnte Deckel fehlerhaft ist.*

   a) Bestimmen Sie den Anteil der Becher mit defektem Deckel unter allen Bechern, die keinen Erdbeerjoghurt enthalten.

      Klären Sie, ob es durch Absenken des Ausschussanteils allein beim Erdbeerjoghurt gelingen kann, den zugesicherten Qualitätsstandard von insgesamt höchstens 1% Ausschussanteil wieder einzuhalten.

   b) Alle Becher mit defektem Deckel dieser Tagesproduktion werden aussortiert. Mit welcher W'keit enthält ein Becher, der zufällig aus den verbleibenden Bechern ausgewählt wird, Erdbeerjoghurt ?

---

3. Jede der vier Abfüllmaschinen wird von einer Person bedient. Die Produktion läuft im Drei-Schicht-Betrieb, so dass täglich 12 Personen benötigt werden.

Unter den 12 Personen, die für die drei Schichten eingeteilt werden sollen, befinden sich genau ein Ehepaar und insgesamt drei Frauen.

a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die 12 Personen für die drei Schichten eines Tages einzuteilen, wenn zwischen den Maschinen nicht unterschieden wird ?

b) Die 12 Personen werden zufällig auf die drei Schichten verteilt.

Untersuchen Sie die Ereignisse

A: Das Ehepaar ist gemeinsam in einer Schicht

und

B: Die drei Frauen sind gemeinsam in einer Schicht

auf stochastische Unabhängigkeit.

---

4. Die Handelskette verkauft die Joghurtbecher regulär zu einem Preis von 39 Cent.

Erfahrungsgemäß wird ein Joghurtbecher am letzten Tag der angegebenen Mindesthaltbarkeit bei regulärem Preis mit einer W'keit von 30% noch verkauft.

Reduziert man hingegen den Preis auf 19 Cent, so erhöht sich diese W'keit auf 80 %.

In einer Filiale sind von einer Lieferung von 750 Joghurtbechern am letzten Tag der angegebenen Mindesthaltbarkeit 120 noch nicht verkauft.

Mit welcher Einnahme für die gesamte Lieferung kann die Filiale jeweils rechnen, wenn sie den Preis auf 19 Cent reduziert bzw. wenn sie ihn unverändert lässt?

Lösung

1. a) $P\left(X \le 1\right) = F_{0,04}^{100}(1) \approx 8{,}7\%$

$P\left(X \ge 2\right) = 1 - F_{0,01}^{100}(1) \approx 26{,}4\%$

b) $P\left(X = 0\right) = 0{,}96^n < 0{,}01 \quad \Leftrightarrow \quad n > \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}96} \quad \Rightarrow \quad n = 113$

---

2. a) $p \cdot \frac{3}{4} + 0{,}1 \cdot \frac{1}{4} = 0{,}04 \quad \Rightarrow \quad p = 0{,}02 = 2\%$

b) $P_{\overline{A}}(E) = \dfrac{0{,}9 \cdot 0{,}25}{0{,}96} \approx 23{,}4\%$

---

3. a) $\binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4} = 34650$

b) $|A| = 3 \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{4} = 9450$ und $|B| = 3 \cdot \binom{9}{1} \cdot \binom{8}{4} = 1890$

$|A \cap B| = 3 \cdot \binom{8}{4} = 210$

$P(A) \cdot P(B) = \dfrac{9450}{34650} \cdot \dfrac{1890}{34650} \neq P(A \cap B) = \dfrac{210}{34650}$

A und B sind voneinander abhängig.

---

4. a) $0{,}3 \cdot 120 \cdot 0{,}39\ € + 630 \cdot 0{,}39\ € = 259{,}74\ €$

bzw. $0{,}8 \cdot 120 \cdot 0{,}19\ € + 630 \cdot 0{,}39\ € = 263{,}94\ €$

b) $k > \dfrac{80 \cdot 0{,}19}{0{,}39} \quad \Rightarrow \quad k \ge 39 \qquad P\left(X \ge 39\right) = 1 - P\left(X \le 38\right) = 1 - F_{0,3}^{100}(38) \approx 3{,}4\%$

Leistungsabitur 2009	Stochastik	Aufgabe IV

Die folgenden Angaben zum Rauchverhalten beziehen sich auf den Drogen-und Suchtbericht der Bundesregierung aus dem Jahr 2008. Personen, die regelmäßig rauchen, werden unabhängig vom Geschlecht als Raucher bezeichnet. Die anderen Personen werden als Nichtraucher bezeichnet.

1. Ein Drittel der Erwachsenen in Deutschland sind Raucher..

   a) Mit welcher W'keit sind unter 15 zufällig ausgewählten Erwachsenen mehr als die Hälf- ´te Nichtraucher?

   b) Es werden zufällig nacheinander n Erwachsene befragt. Die W'keit dafür, dass bei der Befragung Raucher und Nichtraucher einander immer abwechseln, werde mit p_n bezeichnet, wobei der erste Befragte Raucher oder Nichtraucher sein kann.

   Zeigen Sie, dass für eine ungerade Anzahl $n \geq 3$: $p_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1}$

   c) Ab welcher Anzahl n ist die Wahrscheinlichkeit p_n aus Teilaufgabe 1.b) kleiner als ein Milliardstel ?

---

2. Im Jahr 2005 waren 20 % der 12- bis 17-jährigen Jugendlichen Raucher.

   Es wird vermutet, dass durch diverse Kampagnen diese Raucherquote auf 18 % gesenkt werden konnte. Um diese Vermutung zu testen, werden 200 Jugendliche dieser Altersgruppe anonym befragt. Die Nullhypothese "Mindestens 20 % der Jugendlichen sind Raucher" wird abgelehnt, wenn weniger als 19 % der Befragten regelmäßig rauchen.

   Berechnen Sie unter der Annahme, dass die Kampagnen so erfolgreich waren wie vermutet, die W'keit für den Fehler 2. Art. Verwenden Sie die Normalverteilung als Näherung

---

3. *Im Folgenden werden ausschließlich Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I, die die Jahrgangsstufen 5-10 umfasst, betrachtet. Von diesen besuchen in Bayern jeweils 35 % eine Hauptschule beziehungsweise ein Gymnasium.*

   Vereinfachend werde angenommen, dass die Übrigen eine Realschule besuche

   Es soll angenommen werden, dass die folgenden Raucherquoten aus dem Bericht der Bundesregierung auch für Bayern gelten:

   In der Sekundarstufe I sind insgesamt 16% Raucher; an Hauptschulen ist die Quote der Raucher mit 24 % mehr als dreimal so hoch wie an Gymnasien mit 7 %.

a) Wie groß ist die Raucherquote an Realschulen?

Mit welcher W'keit besucht ein aus der Sekundarstufe I zufällig ausgewählter Raucher ein Gymnasium?

b) Mit welcher W'keit besuchen 2 aus der Sekundarstufe I zufällig ausgewählte Personen die gleiche Schulart und mindestens eine der beiden Personen raucht regelmäßig?

---

4. An einem Gymnasium werden die 38 Interessenten am Grundkurs Physik, von denen 12 regelmäßig rauchen, auf 2 Kurse mit 18 beziehungsweise 20 Teilnehmern zufällig verteilt.

   Mit welcher W'keit sind in jedem der beiden Kurse gleich viele Raucher

---

Lösung

1. a) $P\left(X \geq 8\right) = 1 - P\left(X \leq 7\right) = 1 - F^{15}_{\frac{2}{3}}(7) \approx 91{,}2\%$

b) Sei $n = 2k + 1$ mit $n \in \mathbb{N}$ und damit $k = \dfrac{n-1}{2}$.

$$p_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k} + \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k} = \left(\frac{2}{9}\right)^{k} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{9}\right)^{k} = \left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1}$$

c) $$\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{n-1} < 10^{-9} \quad \Leftrightarrow \quad n - 1 > \frac{\ln 10^{-9}}{\ln \frac{\sqrt{2}}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad n > 1 + \frac{\ln 10^{-9}}{\ln \frac{\sqrt{2}}{3}} \quad \Rightarrow \quad n \geq 29$$

---

2. Nullhypothese H_0: $p \geq 0{,}20$ Annahmebereich: $\mathbb{A} = \left\{38; ....; 200\right\}$

Gegenhypothese H_1: $p = 0{,}18$ Ablehnungsbereich: $\overline{\mathbb{A}} = \left\{0; ....; 37\right\}$

$\beta = P\left(X \geq 38\right) = 1 - P\left(X \leq 37\right) = 1 - F^{200}_{0{,}18}(37) \approx 38{,}4\%$

---

3. a) $0{,}35 \cdot 0{,}07 + 0{,}35 \cdot 0{,}24 + 0{,}3 \cdot p = 0{,}16 \quad \Rightarrow \quad p \approx 17{,}2\%$

$$P_R(G) = \frac{P(G \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}07}{0{,}16} \approx 15{,}3\%$$

b) $P(E) = 0{,}35^2 \cdot (1 - 0{,}93^2) + 0{,}35^2 \cdot (1 - 0{,}76^2) + 0{,}3^2 \cdot (1 - 0{,}83^2) = 9{,}6\%$

---

4. $|\Omega| = \binom{38}{18}$

2. $|E| = \binom{12}{6} \cdot \binom{26}{12}$

3. $P(E) \approx 2{,}8 \cdot 10^{-8}$
