

Hypothesentest

1. Ein Internetprovider möchte im Fichtelgebirge eine Werbekampagne durchführen, da er vermutet, dass dort höchstens 40% der Haushalte mit langsamem Internetzugang wissen, dass ein schnellerer Zugang möglich ist. Um diese Vermutung zu testen, werden 50 Haushalte mit langsamem Internetzugang zufällig ausgewählt und befragt.

Der Provider möchte möglichst vermeiden, dass die Werbekampagne auf Grund des Testergebnisses irrtümlich unterlassen wird.

- a) Geben Sie die hierfür geeignete Nullhypothese an und bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel auf einem Signifikanzniveau von 5%.

Der Provider unterlässt irrtümlicherweise die Werbekampagne, wenn er annimmt dass mehr als 40% der Haushalte über die Möglichkeit eines schnelleren Zugangs wissen, obwohl dies nicht der Fall ist.

- b) Beschreiben Sie den Fehler 2. Art in Worten und berechnen Sie ihn für den Fall, dass 50% der Haushalte über die Internetzugangsmöglichkeiten bereits gut informiert sind.
-

Lösung

- a) **Prüfgröße Z:**

Anzahl der Haushalt, die über einen schnellen Zugang zum schnellen Internet Bescheid wissen.

Wenn der Provider möglichst vermeiden möchte, dass die Werbekampagne auf Grund des Testergebnisses irrtümlich unterlassen wird, darf er die Werbekampagne nur dann unterlassen, wenn sehr viele Haushalte über den Zugang zum schnellen Internet Bescheid wissen.

Rechtsseitiger Test:

Nullhypothese $H_0 : p \leq p_0 = 0,40$ **Annahmebereich:** $A = \{0; \dots; k\}$

Gegenhypothese $H_1 : p > p_0 = 0,40$ **Ablehnungsbereich:** $\bar{A} = \{k + 1; \dots; 50\}$

$$\text{Bedingung: } \alpha = P_{p=0,4}(Z \geq k + 1) \leq 0,05 \Rightarrow F_{0,4}^{50}(k) \geq 0,95 \Rightarrow k \geq 26$$

Die Werbekampagne wird durchgeführt, wenn weniger als 27 Haushalte Kenntnis von einem schnellen Zugang zum Internet haben.

- b) Obwohl die Haushalte gut informiert sind, wird die Kampagne durchgeführt.

$$\beta = P_{p=0,5}(Z \leq 26) \leq 66,409\%$$

2. Eine Firma vermutet, dass mindestens 60% der Bewerber um eine freie Stelle eine Eignungsprüfung einem herkömmlichen Bewerbungsgespräch vorziehen würden.

- a) Kann diese Vermutung (Nullhypothese) auf dem Signifikanzniveau von 5% abgelehnt werden, wenn bei einer Befragung von 200 zufällig ausgewählten Bewerbern nur 109 eine Eignungsprüfung bevorzugen?

Begründen Sie Ihre Entscheidung durch Rechnung.

- b) Beschreiben Sie den Fehler 1. Art in Worten.

- c) Überprüfen Sie mit dem Tafelwerk folgende Aussage auf ihren Wahrheitsgehalt:

Wenn mindestens 65% der Bewerber eine Eignungsprüfung vorziehen würden, kann man bei gleichem Ausgang der Befragung die Nullhypothese hochsignifikant ablehnen.

Lösung

- a) **Prüfgröße Z:**

Anzahl der Bewerber, die eine Eignungsprüfung einem Bewerbungsgespräch vorziehen.

$$\text{Nullhypothese } H_0 : p \geq p_0 = 0,60 \quad \text{Annahmebereich: } A = \{k + 1; \dots; 200\}$$

$$\text{Gegenhypothese } H_1 : p < p_0 = 0,60 \quad \text{Ablehnungsbereich: } \bar{A} = \{0; \dots; k\}$$

$$\text{Bedingung: } \alpha = P_{p=0,6}(Z \leq k) \leq 0,05 \Rightarrow F_{0,6}^{200}(k) \leq 0,05 \Rightarrow k \leq 108$$

Die Nullhypothese kann nicht abgelehnt werden.

- b) Obwohl mindestens 60% der Befragten eine Eignungsprüfung vorziehen, wird auf Grund des Tests vermutet, dass dem nicht so ist.

$$\text{c) } F_{0,65}^{200}(108) \leq 0,0086$$

Die Hypothese kann hochsignifikant abgelehnt werden; die Aussage ist wahr.

-
3. Beim Eiertutschen messen sich immer ein rotes und ein blaues Ei und jedes Mal wird ein neues Paar eingesetzt. Nicola stellt nach 10 Versuchen fest, dass sieben mal das rote Ei Sieger ist und behauptet nun, die roten Eier seien stärker.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie sich irrt, weil ein solches (oder ein besseres) Ergebnis auch rein zufällig zustande kommen kann?

Es wird weiter getütscht. Wie viele rote Siege braucht man bei 30 Partien, damit die Irrtumswahrscheinlichkeit auf unter 5% sinkt?

Lösung

- a) Obwohl rote und blaue Eier gleich "stark" sind, gehen die roten Eier mindestens siebenmal als Sieger hervor.

$$P_{p=0,5}(Z \geq 7) = 1 - F_{0,5}^{10}(6) = 17,187\%$$

$$b) \binom{k}{k} \geq 0,95 \Rightarrow k \geq 19$$

$$c) P_{p=0,5}(Z \geq k+1) = 1 - P_{p=0,5}(Z \leq k) = 1 - F_{0,5}^{30}(k) \leq 0,05 \Leftrightarrow$$

$$F_{0,5}^{30}(k) \geq 0,95 \Rightarrow k \geq 19$$

Man benötigt mindestens 20 rote Siege!

4. In einer Spielhölle wird mit fairen Würfeln und mit Würfeln, bei denen die Sechs nur in 10% aller Fälle auftritt, gespielt. Bei einer Polizeirazzia werden die äußerlich nicht unterscheidbaren Würfel getestet.

Ein Würfel wird als falsch bezeichnet, wenn bei 100 Würfeln höchstens 12 Sechser fallen.

- a) Berechnen Sie für die Nullhypothese $H_0 : p = \frac{1}{6}$ die W'keiten für einen Fehler 1. Art und 2. Art.

- b) Wie müsste der Annahmereich gewählt werden, damit die W'keit für einen Fehler 1. Art höchstens 10% beträgt?

Wie groß ist dann die W'keit für den Fehler 2. Art?

Lösung

- a) **Prüfgröße Z:** Anzahl der erzielten Sechser

$$\text{Nullhypothese } H_0 : p = \frac{1}{6}$$

$$\text{Annahmereich: } \mathbb{A} = \left\{ 13; \dots; 100 \right\}$$

$$\text{Gegenhypothese } H_1 : p = \frac{1}{10}$$

$$\text{Ablehnungsbereich: } \overline{\mathbb{A}} = \left\{ 0; \dots; 12 \right\}$$

$$\alpha = P_{p=\frac{1}{6}}(Z \leq 12) = F_{\frac{1}{6}}^{100}(12) = 12,965\%$$

und

$$\beta = P_{p=\frac{1}{10}}(Z \geq 13) = 1 - F_{\frac{1}{10}}^{100}(12) = 19,818\%$$

$$\text{b) } \alpha = P_{p=\frac{1}{6}}(Z \leq k) \leq 0,10 \Leftrightarrow F_{\frac{1}{6}}^{100}(k) \leq 0,10 \Rightarrow k = 11$$

$$\mathbb{A} = \{12; \dots; 100\}$$

$$\beta = 1 - F_{0,1}^{100}(11) = 29,697\%$$

5. Es besteht der Verdacht, dass eine Münze häufiger Kopf als Zahl zeigt. Um das zu Testen, wird die Münze 10 mal geworfen, wobei 7-mal Kopf fällt.

Kann auf dem Signifikanzniveau 0,05 die Nullhypothese $H_0 : p = \frac{1}{2}$ über die Wahrscheinlichkeit p von Kopf verworfen werden?

Lösung

Prüfgröße Z: Anzahl von K

Nullhypothese $H_0 : p = \frac{1}{2}$

Annahmereich: $\mathbb{A} = \{0; \dots; k\}$

Gegenhypothese $H_1 : p > \frac{1}{2}$

Ablehnungsbereich: $\overline{\mathbb{A}} = \{k+1; \dots; 10\}$

Bedingung : $\alpha = P_{p=0,5}(Z \geq k+1) \leq 0,05 \Rightarrow F_{0,5}^{10}(k) \geq 0,95 \Rightarrow k \geq 8$

Die Nullhypothese kann auf eine Signifikanzniveau von 5% nicht verworfen werden.

6. Ein Medikament besitzt eine Heilungschance von 80%. Ein neues Medikament soll dann auf den Markt kommen, wenn seine Heilungswahrscheinlichkeit p größer als 0,8 ist.

Um das zu überprüfen, wird es zuerst an 50 Personen ausprobiert.

Testen Sie zuerst die Nullhypothese $H_0 : p = 0,8$ gegen die Gegenhypothese $H_1 : p > 0,80$

dem Signifikanzniveau.

a) Welches Entscheidungsverfahren ergibt sich?

b) Wie groß ist die Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art, wenn in Wirklichkeit $p = 0,90$?

Lösung

a) Prüfgröße Z : Anzahl der geheilten Patienten

Nullhypothese $H_0 : p = 0,8$ Annahmehereich : $\mathbb{A} = \{0; \dots; k\}$

Gegenhypothese $H_1 : p > 0,8$ Ablehnungsbereich: $\overline{\mathbb{A}} = \{k + 1; \dots; 50\}$

Bedingung : $\alpha = P_{p=0,8}(Z \geq k + 1) \leq 0,05 \Rightarrow F_{0,8}^{50}(k) \geq 0,95 \Rightarrow k \geq 44$

Man nimmt an, dass das neue Medikament besser ist, wenn mehr als 44 Patienten geheilt werden.

b) $\beta = P_{p=0,9}(Z \leq 44) = F_{0,9}^{50}(44) = 38,388\%$

7. Der Hersteller eines Haarwuchsmittels "Löwenmähne" versichert, dass sein Produkt in mehr als 60% aller Fälle wirksam ist. Zur Überprüfung dieser Behauptung wird das Haarwuchsmittel von einem Forschungsinstitut durch eine Zufallsstichprobe an 100 glatzköpfigen Patienten getestet,

a) Entwickeln Sie für das Forschungsinstitut ein Entscheidungsverfahren, so dass lediglich mit einer W'keit von 5% dem Haarwuchsmittelhersteller zu Unrecht irreführende Werbung vorgeworfen werden kann.

b) Wie wird entschieden, wenn das Mittel bei 50 (70) von den 100 Personen wirksam ist?

Lösung

Dem Hersteller wird zu Unrecht irreführende Werbung vorgeworfen, wenn man seine Behauptung verwirft, obwohl sie stimmt.

a) $P_{p \geq 0,6}(Z \leq k) \leq 0,05 \Leftrightarrow F_{0,06}^{100}(k) \leq 0,05 \Rightarrow k \leq 51$

b) siehe a)

8. Aufgrund der vielfältigen Aktivitäten einer Bürgerinitiative vermutet der Gemeinderat, dass mindestens 55% der Wahlberechtigten der Gemeinde gegen die Errichtung einer Windkraftanlage sind.

Um diese Vermutung zu testen, werden 200 zufällig ausgewählte Wahlberechtigte der Gemeinde befragt.

Wie muss die Entscheidungsregel mit einem möglichst großen Ablehnungsbereich lauten, wenn die Vermutung des Gemeinderats mit einer W'keit von höchstens 5% irrtümlich abgelehnt werden soll?

Lösung

Prüfgröße Z: Anzahl der Personen, die gegen die Windkraftanlage sind.

Die Vermutung der Gemeinde wird irrtümlich abgelehnt, wenn man annimmt, dass weniger als 55% der Wahlberechtigten gegen die Windkraftanlage sind, obwohl dies nicht stimmt.

Nullhypothese $H_0 : p \geq p_0 = 0,55$ **Annahmehereich:** $\mathbb{A} = \{k + 1; \dots; 200\}$

Gegenhypothese $H_1 : p < p_0 = 0,55$ **Ablehnungsbereich:** $\overline{\mathbb{A}} = \{0; \dots; k\}$

$$\text{Bedingung: } \alpha = P_{p=0,55}(Z \leq k) \leq 0,05 \Rightarrow F_{0,55}^{200}(k) \leq 0,05 \Rightarrow k \leq 97$$

Man lehnt die Vermutung des Gemeinderats ab, wenn höchstens 97 der 200 Befragten gegen die Windkraftanlage sind.

-
9. Eine Fluggesellschaft beabsichtigt, ihren Passagieren neben dem Standardmenü gegen Zahlung ein Premiummenü anzubieten, möchte diesen Service jedoch nur dann einrichten, wenn er von mehr als 15% der Passagiere gewünscht wird.

Die Nullhypothese

H_0 : Höchstens 15% der Passagiere wünschen das Angebot eines Premiummenü

soll auf der Basis einer Stichprobe von 200 Passagieren auf einem Signifikanzniveau von 5% getestet werden.

a) Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel

b) Die Fluggesellschaft hätte für den Test - bei gleichem Signifikanzniveau - anstelle der Nullhypothese

H_0 : Höchstens 15% der Passagiere wünschen das Angebot eines Premiummenü auch die Nullhypothese

H_0 : Mehr als 15% der Passagiere wünschen das Angebot eines Premiummenüs

wählen können. Bei der Wahl der Nullhypothese stand für die Fluggesellschaft eine der beiden folgenden Überlegungen im Vordergrund:

- Der irrtümliche Verzicht auf das Angebot des Premiummenüs wäre mit einem Imageverlust verbunden.
- Das irrtümliche Angebot des Premiummenüs wäre mit einem finanziellen Verlust verbunden.

Entscheiden Sie, welche der beiden Überlegungen für die Fluggesellschaft bei der Wahl der Nullhypothese im Vordergrund stand. Erläutern Sie Ihre Entscheidung.

Lösung

a) **Prüfgröße Z:** Anzahl der Personen, die das Premiummenü wünschen

Nullhypothese $H_0 : p \leq p_0 = 0,15$ **Annahmebereich:** $\mathbb{A} = \{0; \dots; k\}$

Gegenhypothese $H_1 : p > p_0 = 0,15$ **Ablehnungsbereich:** $\overline{\mathbb{A}} = \{k + 1; \dots; 200\}$

Bedingung: $\alpha = P_{p=0,15}(Z \geq k + 1) \leq 0,05 \Rightarrow F_{0,15}^{200}(k) \geq 0,95 \Rightarrow k \geq 38$

Man führt das Premiummenü ein, wenn mehr als 38 Befragte sich ein derartiges Menü wünschen.

b) Wählt man

H_0 : Höchstens 15% der Passagiere wünschen das Angebot eines Premiummenü

dann müssen sich viele der Befragten dieses Menü wünschen, damit man die Nullhypothese ablehnt d.h. bei dieser Wahl der Nullhypothese steht der finanzielle Aspekt im Vordergrund.

H_0 : Mehr als 15% der Passagiere wünschen das Angebot eines Premiummenü

dann müssen sich sehr wenig der Befragten für das Menü aussprechen, damit man die Nullhypothese ablehnt d.h. bei dieser Wahl der Nullhypothese gibt der evtl. entstehende Imageverlust den Ausschlag.

10. Nachdem die Verfilmung eines bekannten Romans erfolgreich in den Kinos gezeigt wurde, veröffentlicht eine Tageszeitung das Ergebnis einer repräsentativen Umfrage unter Jugendlichen. Der Umfrage zufolge hatten 88% der befragten Jugendlichen den Roman zum Zeitpunkt des Kinostarts noch nicht gelesen.

Ein Jahr später möchte die Tageszeitung ermitteln, ob sich durch die Verfilmung der Anteil p der Jugendlichen, die den Roman gelesen haben, wesentlich erhöht hat.

Die Nullhypothese $H_0 : p \leq 0,15$ soll mithilfe einer Stichprobe von 100 Jugendlichen auf einem Signikanzniveau von 10% getestet werden.

Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

Lösung

- a) **Prüfgröße Z :** Anzahl der Personen, die den Roman gelesen haben

Nullhypothese $H_0 : p \leq p_0 = 0,15$ **Annahmebereich:** $\mathbb{A} = \left\{ 0; \dots; k \right\}$

Gegenhypothese $H_1 : p > p_0 = 0,15$ **Ablehnungsbereich:** $\overline{\mathbb{A}} = \left\{ k+1; \dots; 100 \right\}$

Bedingung: $\alpha = P_{p=0,15}(Z \geq k+1) \leq 0,10 \Rightarrow F_{0,15}^{1000}(k) \geq 0,90 \Rightarrow k \geq 21$

Wenn mehr als 21 Jugendliche den Roman gelesen haben, lehnt man die Nullhypothese ab.
