Abitur 2014 Mathematik Infinitesimalrechnung II

Geben Sie jeweils den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten periodischen Funktion an, die die angegebene Eigenschaft hat.

Teilaufgabe Teil A 1a (1 BE)

Der Graph der Funktion g geht aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $x \mapsto \sin x$ durch Spiegelung an der y-Achse hervor.

Teilaufgabe Teil A 1b (1 BE)

Die Funktion h hat den Wertebereich $[1; 3]$.

Teilaufgabe Teil A 1c (1 BE)

Die Funktion k besitzt die Periode π.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = e^x \cdot \left(2x + x^2\right)$.

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

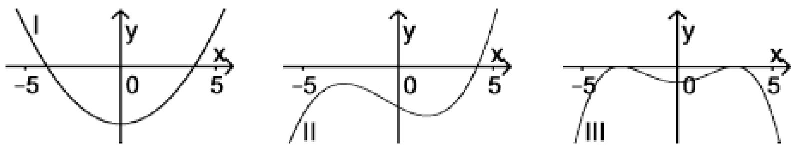
Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Zeigen Sie, dass die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F mit $F(x) = x^2 \cdot e^x$ eine Stammfunktion von f ist. Geben Sie eine Gleichung einer weiteren Stammfunktion G von f an, für die $G(1) = 2e$ gilt.

Teilaufgabe Teil A 3 (2 BE)

Der Graph einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g : x \mapsto g(x)$ besitzt für $-5 \leq x \leq 5$ zwei Wendepunkte. Entscheiden Sie, welcher der Graphen I, II und III zur zweiten Ableitungsfunktion g'' von g gehört. Begründen Sie Ihre Entscheidung.



Teilaufgabe Teil A 4 (5 BE)

In einem Koordinatensystem (vgl. Abbildung 1) werden alle Rechtecke betrachtet, die folgende Bedingungen erfüllen:

- Zwei Seiten liegen auf den Koordinatenachsen.
- Ein Eckpunkt liegt auf dem Graphen G_f der Funktion $f : x \mapsto -\ln x$ mit $0 < x < 1$.

Abbildung 1 zeigt ein solches Rechteck.
Unter den betrachteten Rechtecken gibt es eines mit größtem Flächeninhalt. Berechnen Sie die Seitenlängen dieses Rechtecks.

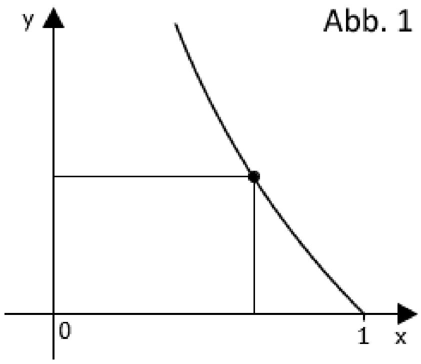
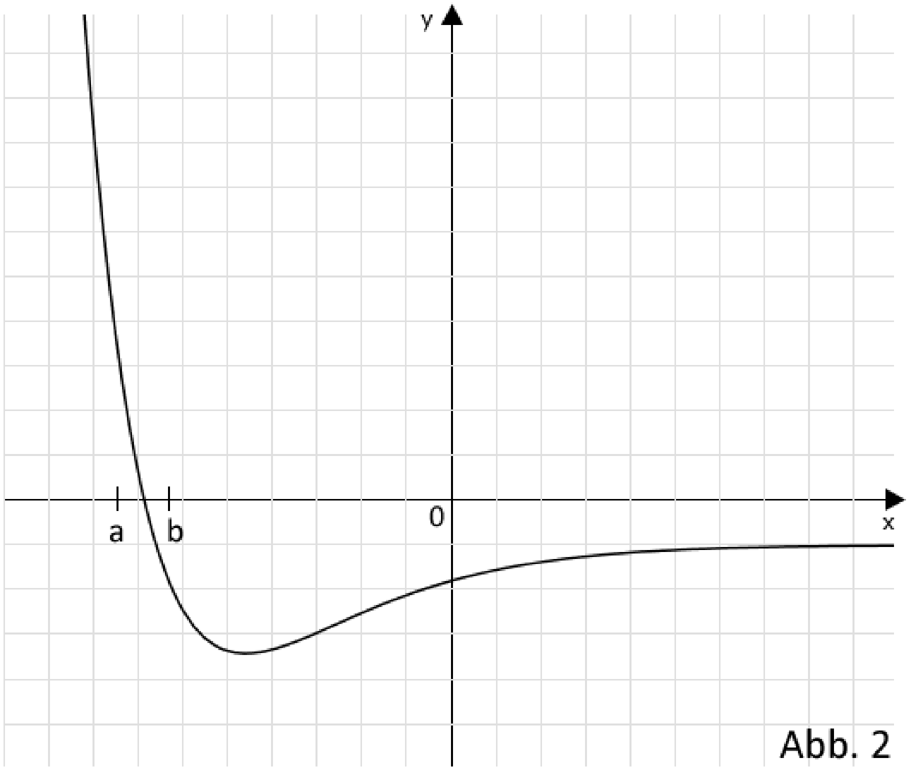


Abbildung 2 zeigt den Graphen einer Funktion f.



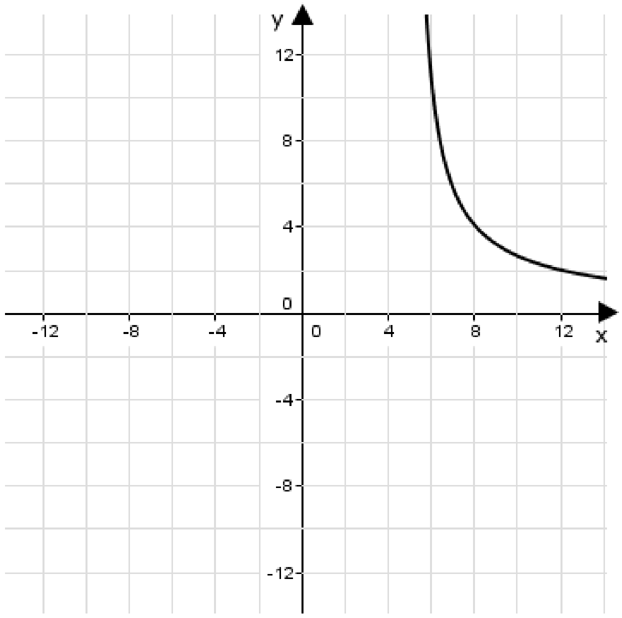
Teilaufgabe Teil A 5a (2 BE)

Beschreiben Sie für $a \leq x \leq b$ den Verlauf des Graphen einer Stammfunktion von f.

Teilaufgabe Teil A 5b (3 BE)

Skizzieren Sie in Abbildung 2 den Graphen einer Stammfunktion von f im gesamten dargestellten Bereich.

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{20x}{x^2 - 25}$ und maximalem Definitionsbereich D_f. Die Abbildung zeigt einen Teil des Graphen G_f von f.



Teilaufgabe Teil B 1a (5 BE)

Zeigen Sie, dass $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5; 5\}$ gilt und dass G_f symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist. Geben Sie die Nullstelle von f sowie die Gleichungen der drei Asymptoten von G_f an.

Teilaufgabe Teil B 1b (4 BE)

Weisen Sie nach, dass die Steigung von G_f in jedem Punkt des Graphen negativ ist. Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem G_f die x-Achse schneidet.

Teilaufgabe Teil B 1c (3 BE)

Skizzieren Sie in der Abbildung den darin fehlenden Teil von G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse.

Teilaufgabe Teil B 1d (4 BE)

Die Funktion $f^{\star}: x \mapsto f(x)$ mit Definitionsbereich $]5;+\infty[$ unterscheidet sich von der Funktion f nur hinsichtlich des Definitionsbereichs. Begründen Sie, dass die Funktion f nicht umkehrbar ist, die Funktion $f^{\star}$ dagegen schon. Zeichnen Sie den Graphen der Umkehrfunktion von $f^{\star}$ in die Abbildung ein.

Teilaufgabe Teil B 1e (5 BE)

Der Graph von f, die x-Achse sowie die Geraden mit den Gleichungen $x = 10$ und $x = s$ mit $s > 10$ schließen ein Flächenstück mit dem Inhalt $A(s)$ ein. Bestimmen Sie $A(s)$.

(*Ergebnis:* $A(s) = 10 \cdot \ln \dfrac{s^2 - 25}{75}$)

Teilaufgabe Teil B 1f (3 BE)

Ermitteln Sie s so, dass das Flächenstück aus Aufgabe 1e den Inhalt 100 besitzt.

Teilaufgabe Teil B 1g (2 BE)

Bestimmen Sie das Verhalten von $A(s)$ für $s \to +\infty$

Ein Motorboot fährt mit konstanter Motorleistung auf einem Fluss eine Strecke der Länge 10 km zuerst flussabwärts und unmittelbar anschließend flussaufwärts zum Ausgangspunkt zurück. Mit der Eigengeschwindigkeit des Motorboots wird der Betrag der Geschwindigkeit bezeichnet, mit der sich das Boot bei dieser Motorleistung auf einem stehenden Gewässer bewegen würde.

Im Folgenden soll modellhaft davon ausgegangen werden, dass die Eigengeschwindigkeit des Boots während der Fahrt konstant ist und das Wasser im Fluss mit der konstanten Geschwindigkeit $5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fließt. Die für das Wendemanöver erforderliche Zeit wird vernachlässigt.

Die Gesamtfahrtzeit in Stunden, die das Boot für Hinfahrt und Rückfahrt insgesamt benötigt, wird im Modell für $x > 5$ durch den Term $t(x) = \dfrac{10}{x+5} + \dfrac{10}{x-5}$ angegeben. Dabei ist x die Eigengeschwindigkeit des Boots in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Teilaufgabe Teil B 2a (2 BE)

Bestimmen Sie auf der Grundlage des Modells für eine Fahrt mit einer Eigengeschwindigkeit von $10\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und für eine Fahrt mit einer Eigengeschwindigkeit von $20\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ jeweils die Gesamtfahrtzeit in Minuten.

Teilaufgabe Teil B 2b (3 BE)

Begründen Sie, dass der erste Summand des Terms $t(x)$ die für die Hinfahrt, der zweite Summand die für die Rückfahrt erforderliche Zeit in Stunden angibt.

Teilaufgabe Teil B 2c (2 BE)

Begründen Sie im Sachzusammenhang, dass $t(x)$ für $0 < x < 5$ nicht als Gesamtfahrtzeit interpretiert werden kann.

Teilaufgabe Teil B 2d (2 BE)

Zeigen Sie, dass die Terme $f(x)$ und $t(x)$ äquivalent sind.

Teilaufgabe Teil B 2e (5 BE)

Beschreiben Sie, wie man mithilfe der Abbildung für eine Fahrt mit einer Gesamtfahrtzeit zwischen zwei und vierzehn Stunden die zugehörige Eigengeschwindigkeit des Boots näherungsweise ermitteln kann. Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells die Eigengeschwindigkeit des Boots für eine Fahrt mit einer Gesamtfahrtzeit von vier Stunden.