Abitur 2014 Mathematik Infinitesimalrechnung I

Teilaufgabe Teil A 1 (5 BE)

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \frac{x}{\ln x}$ mit Definitionsmenge $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts des Graphen von f.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = e^x \cdot \left(2x + x^2\right)$.

Teilaufgabe Teil A 2a (2 BE)

Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.

Teilaufgabe Teil A 2b (3 BE)

Zeigen Sie, dass die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F mit $F(x) = x^2 \cdot e^x$ eine Stammfunktion von f ist. Geben Sie eine Gleichung einer weiteren Stammfunktion G von f an, für die $G(1) = 2e$ gilt.

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $g_{a,c} : x \mapsto \sin(a\,x) + c$ mit $a, c \in \mathbb{R}_0^+$.

Teilaufgabe Teil A 3a (3 BE)

Geben Sie für jede der beiden folgenden Eigenschaften einen möglichen Wert für a und einen möglichen Wert für c so an, dass die zugehörige Funktion $g_{a,c}$ diese Eigenschaft besitzt.

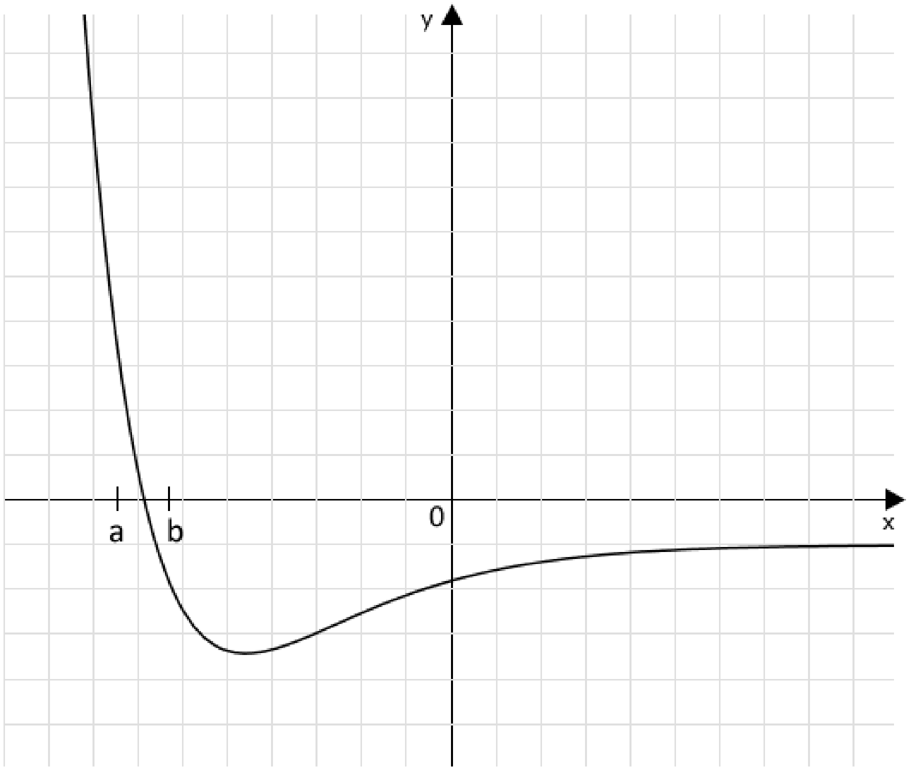
α) Die Funktion $g_{a,c}$ hat die Wertemenge $[0; 2]$.

β) Die Funktion $g_{a,c}$ hat im Intervall $[0; \pi]$ genau drei Nullstellen.

Teilaufgabe Teil A 3b (2 BE)

Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a, welche Werte die Ableitung von $g_{a,c}$ annehmen kann.

Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.



Teilaufgabe Teil A 4a (2 BE)

Beschreiben Sie für $a \leq x \leq b$ den Verlauf des Graphen einer Stammfunktion von f.

Teilaufgabe Teil A 4b (3 BE)

Skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen einer Stammfunktion von f im gesamten dargestellten Bereich.

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto 2 - \sqrt{12 - 2x}$ mit maximaler Definitionsmenge $D_f =]-\infty; 6]$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

Teilaufgabe Teil B 1a (5 BE)

Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen. Bestimmen Sie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ und geben Sie $f(6)$ an.

Teilaufgabe Teil B 1b (5 BE)

Bestimmen Sie den Term der Ableitungsfunktion f' von f und geben Sie die maximale Definitionsmenge von f' an.
Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to 6} f'(x)$ und beschreiben Sie, welche Eigenschaft von G_f aus diesem Ergebnis folgt.

(*zur Kontrolle:* $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{12-2x}}$)

Teilaufgabe Teil B 1c (2 BE)

Geben Sie das Monotonieverhalten von G_f und die Wertemenge von f an.

Teilaufgabe Teil B 1d (3 BE)

Geben Sie $f(-2)$ an und zeichnen Sie G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem ein (Platzbedarf im Hinblick auf die folgenden Aufgaben: $-3 \leq y \leq 7$).

Teilaufgabe Teil B 1e (4 BE)

Die Funktion f ist in D_f umkehrbar. Geben Sie die Definitionsmenge der Umkehrfunktion f^{-1} von f an und zeigen Sie, dass $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$ gilt.

Der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $h : x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$ ist die Parabel G_h. Der Graph der in Aufgabe 1e betrachteten Umkehrfunktion f^{-1} ist ein Teil dieser Parabel.

Teilaufgabe Teil B 2a (3 BE)

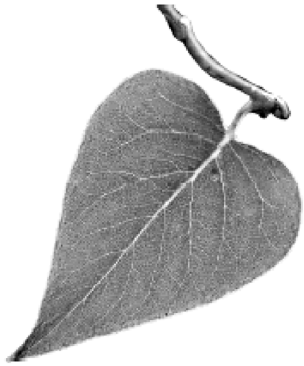
Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_h mit der durch die Gleichung $y = x$ gegebenen Winkelhalbierenden w des I. und III. Quadranten.

(*Teilergebnis: x-Koordinaten der Schnittpunkte:* -2 *und* 4)

Teilaufgabe Teil B 2b (4 BE)

Zeichnen Sie die Parabel G_h - unter Berücksichtigung des Scheitels – im Bereich $-2 \leq x \leq 4$ in Ihre Zeichnung aus Aufgabe 1d ein. Spiegelt man diesen Teil von G_h an der Winkelhalbierenden w, so entsteht eine herzförmige Figur; ergänzen Sie Ihre Zeichnung dementsprechend.

Durch die in Aufgabe 2 entstandene herzförmige Figur soll das abgebildete Blatt modellhaft beschrieben werden. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem aus Aufgabe 1d soll dabei 1 cm in der Wirklichkeit entsprechen.



Teilaufgabe Teil B 3a (5 BE)

Berechnen Sie den Inhalt des von G_h und der Winkelhalbierenden w eingeschlossenen Flächenstücks. Bestimmen Sie unter Verwendung dieses Werts den Flächeninhalt des Blatts auf der Grundlage des Modells.

Teilaufgabe Teil B 3b (6 BE)

Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an G_h im Punkt $(-2|h(-2))$. Berechnen Sie den Wert, den das Modell für die Größe des Winkels liefert, den die Blattränder an der Blattspitze einschließen.

Teilaufgabe Teil B 3c (3 BE)

Der Verlauf des oberen Blattrands wird in der Nähe der Blattspitze durch das bisher verwendete Modell nicht genau genug dargestellt. Daher soll der obere Blattrand im Modell für $-2 \leq x \leq 0$ nicht mehr durch G_h, sondern durch den Graphen G_k einer in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion k dritten Grades beschrieben werden. Für die Funktion k werden die folgenden Bedingungen gewählt (k' und h' sind die Ableitungsfunktionen von k bzw. h):

I	$k(0) = h(0)$
II	$k'(0) = h'(0)$
III	$k(-2) = h(-2)$
IV	$k'(-2) = 1,5$

Begründen Sie im Sachzusammenhang, dass die Wahl der Bedingungen I, II und III sinnvoll ist. Machen Sie plausibel, dass die Bedingung IV dazu führt, dass die Form des Blatts in der Nähe der Blattspitze im Vergleich zum ursprünglichen Modell genauer dargestellt wird.