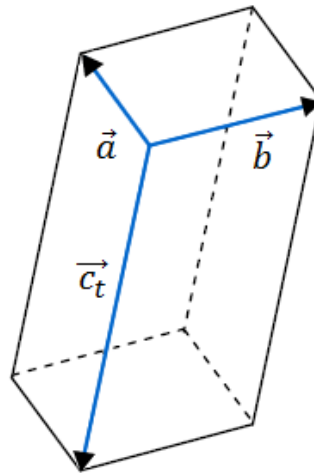


Abitur 2014 Mathematik Geometrie VI

Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c}_t = \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix}$ spannen für jeden Wert von t mit $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ einen Körper auf. Die Abbildung zeigt den Sachverhalt beispielhaft für einen Wert von t .



Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Zeigen Sie, dass die aufgespannten Körper Quader sind.

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Bestimmen Sie diejenigen Werte von t , für die der jeweils zugehörige Quader das Volumen 15 besitzt.

Eine Kugel besitzt den Mittelpunkt $M(-3|2|7)$. Der Punkt $P(3|4|4)$ liegt auf der Kugel.

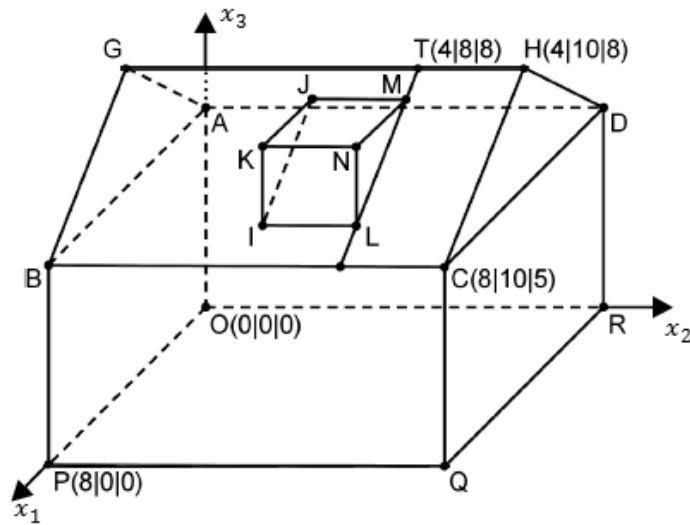
Teilaufgabe Teil A 2a (3 BE)

Der Punkt Q liegt ebenfalls auf der Kugel, die Strecke $[PQ]$ verläuft durch deren Mittelpunkt. Ermitteln Sie die Koordinaten von Q .

Teilaufgabe Teil A 2b (2 BE)

Weisen Sie nach, dass die Kugel die $x_1 x_2$ -Ebene berührt.

Die Abbildung zeigt modellhaft ein Einfamilienhaus, das auf einer horizontalen Fläche steht. Auf einer der beiden rechteckigen Dachflächen soll eine Dachgaube errichtet werden. Die Punkte A, B, C, D, O, P, Q und R sind die Eckpunkte eines Quaders. Das gerade dreiseitige Prisma $LMNIJK$ stellt die Dachgaube dar, die Strecke $[GH]$ den First des Dachs, d. h. die obere waagrechte Dachkante. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m, d. h. das Haus ist 10 m lang.



Teilaufgabe Teil B a (2 BE)

Berechnen Sie den Inhalt derjenigen Dachfläche, die im Modell durch das Rechteck $BCHG$ dargestellt wird.

Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

In der Stadt, in der das Einfamilienhaus steht, gilt für die Errichtung von Dachgauben eine Satzung, die jeder Bauherr einhalten muss. Diese Satzung lässt die Errichtung einer Dachgaube zu, wenn die Größe des Neigungswinkels der Dachfläche des jeweiligen Hausdachs gegen die Horizontale mindestens 35° beträgt. Zeigen Sie rechnerisch, dass für das betrachtete Einfamilienhaus die Errichtung einer Dachgaube zulässig ist.

Die Dachfläche, auf der die Dachgaube errichtet wird, liegt im Modell in der Ebene $E : 3x_1 + 4x_3 - 44 = 0$.

Die Dachgaube soll so errichtet werden, dass sie von dem seitlichen Rand der Dachfläche, der im Modell durch die Strecke $[HC]$ dargestellt wird, den Abstand 2 m und vom First des Dachs den Abstand 1 m hat. Zur Ermittlung der Koordinaten des Punkts M wird die durch den Punkt $T(4|8|8)$ verlaufende Gerade $t : \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, betrachtet.

Teilaufgabe Teil B c (5 BE)

Begründen Sie, dass t in der Ebene E verläuft und von der Geraden HC den Abstand 2 besitzt.

Teilaufgabe Teil B d (3 BE)

Auf der Geraden t wird nun der Punkt M so festgelegt, dass der Abstand der Dachgaube vom First 1 m beträgt. Bestimmen Sie die Koordinaten von M .

(*Ergebnis:* $M(4,8|8|7,4)$)

Die Punkte M und N liegen auf der Geraden $m : \vec{X} = \begin{pmatrix} 4,8 \\ 8 \\ 7,4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$, die im Modell die Neigung der Dachfläche der Gaube festlegt. Die zur x_3 -Achse parallele Strecke $[NL]$ stellt im Modell den sogenannten Gaubenstiel dar; dessen Länge soll 1,4 m betragen. Um die Koordinaten von N und L zu bestimmen, wird die Ebene F betrachtet, die durch Verschiebung von E um 1,4 in positive x_3 -Richtung entsteht.

Teilaufgabe Teil B e (3 BE)

Begründen Sie, dass $3x_1 + 4x_3 - 49,6 = 0$ eine Gleichung von F ist.

Teilaufgabe Teil B f (4 BE)

Bestimmen Sie die Koordinaten von N und L .

(*Teilergebnis:* $N(7,2|8|7)$)