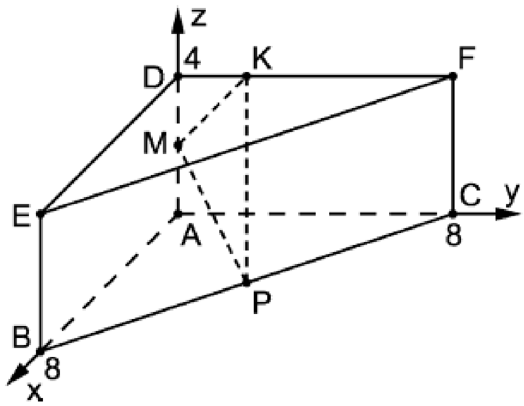
Abitur 2014 Mathematik Geometrie V

Die Abbildung zeigt ein gerades Prisma $ABCDEF$ mit $A(0|0|0)$, $B(8|0|0)$, $C(0|8|0)$ und $D(0|0|4)$.



Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Bestimmen Sie den Abstand der Eckpunkte B und F.

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Die Punkte M und P sind die Mittelpunkte der Kanten $[AD]$ bzw. $[BC]$.
Der Punkt K $(0|y_K|4)$ liegt auf der Kante $[DF]$. Bestimmen Sie y_K so, dass das Dreieck KMP in M rechtwinklig ist.

Gegeben ist die Ebene $E: 3x_2 + 4x_3 = 5$.

Teilaufgabe Teil A 2a (1 BE)

Beschreiben Sie die besondere Lage von E im Koordinatensystem.

Teilaufgabe Teil A 2b (4 BE)

Untersuchen Sie rechnerisch, ob die Kugel mit Mittelpunkt $Z(1|6|3)$ und Radius 7 die Ebene E schneidet.

In einem kartesischen Koordinatensystem legen die Punkte $A(4|0|0)$, $B(0|4|0)$ und $C(0|0|4)$ das Dreieck ABC fest, das in der Ebene $E: x_1 + x_2 + x_3 = 4$ liegt.

Teilaufgabe Teil B a (3 BE)

Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

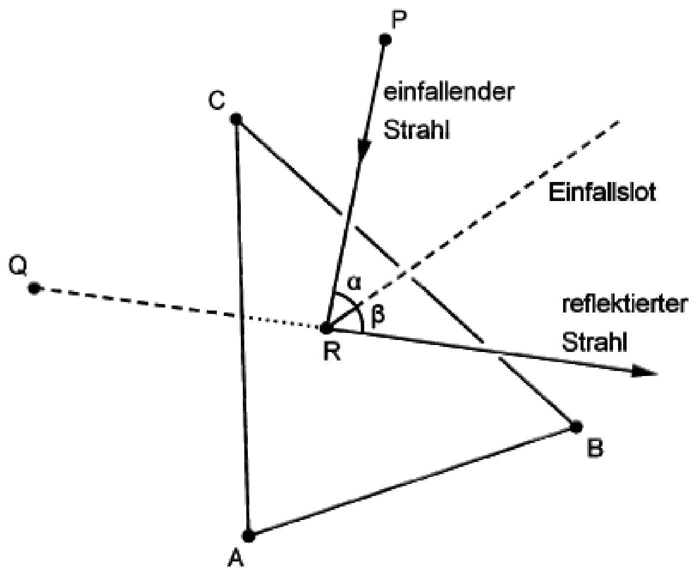
Das Dreieck ABC stellt modellhaft einen Spiegel dar. Der Punkt $P(2|2|3)$ gibt im Modell die Position einer Lichtquelle an, von der ein Lichtstrahl ausgeht. Die Richtung dieses Lichtstrahls wird im Modell durch den Vektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ beschrieben.

Teilaufgabe Teil B b (5 BE)

Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an, entlang derer der Lichtstrahl im Modell verläuft. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts R, in dem g die Ebene E schneidet, und begründen Sie, dass der Lichtstrahl auf dem dreieckigen Spiegel auftrifft.

(*zur Kontrolle:* $R(1,5|1,5|1)$)

Der einfallende Lichtstrahl wird in demjenigen Punkt des Spiegels reflektiert, der im Modell durch den Punkt R dargestellt wird. Der reflektierte Lichtstrahl geht für einen Beobachter scheinbar von einer Lichtquelle aus, deren Position im Modell durch den Punkt $Q(0|0|1)$ beschrieben wird (vgl. Abbildung).



Teilaufgabe Teil B c (3 BE)

Zeigen Sie, dass die Punkte P und Q bezüglich der Ebene E symmetrisch sind.

Das Lot zur Ebene E im Punkt R wird als Einfallslot bezeichnet.

Teilaufgabe Teil B d (5 BE)

Die beiden Geraden, entlang derer der einfallende und der reflektierte Lichtstrahl im Modell verlaufen, liegen in einer Ebene F. Ermitteln Sie eine Gleichung von F in Normalenform. Weisen Sie nach, dass das Einfallslot ebenfalls in der Ebene F liegt.

(*mögliches Teilergebnis:* $F : x_1 - x_2 = 0$)

Teilaufgabe Teil B e (4 BE)

Zeigen Sie, dass die Größe des Winkels β zwischen reflektiertem Lichtstrahl und Einfallslot mit der Größe des Winkels α zwischen einfallendem Lichtstrahl und Einfallslot übereinstimmt.