Abitur 2013 Mathematik Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto \sqrt{3x+9}$ mit maximaler Definitionsmenge D.

Teilaufgabe Teil 1 1a (3 BE)

Bestimmen Sie D und geben Sie die Nullstelle von g an.

Teilaufgabe Teil 1 1b (4 BE)

Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von g im Punkt $P(0|3)$.

Geben Sie jeweils den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion an, die die angegebene Wertemenge W hat.

Teilaufgabe Teil 1 2a (2 BE)

$W = [2; +\infty[$

Teilaufgabe Teil 1 2b (2 BE)

$W = [-2; 2]$

Teilaufgabe Teil 1 3 (3 BE)

Geben Sie für $x \in \mathbb{R}^+$ die Lösungen der folgenden Gleichung an:

$$(\ln x - 1) \cdot (e^x - 2) \cdot \left(\frac{1}{x} - 3\right) = 0$$

Teilaufgabe Teil 1 4 (6 BE)

Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f.

Skizzieren Sie in Abbildung 1 den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Integralfunktion $F : x \mapsto \int_1^x f(t)\mathrm{d}t$.

Berücksichtigen Sie dabei mit jeweils angemessener Genauigkeit insbesondere die Nullstellen und Extremstellen von F sowie $F(0)$.

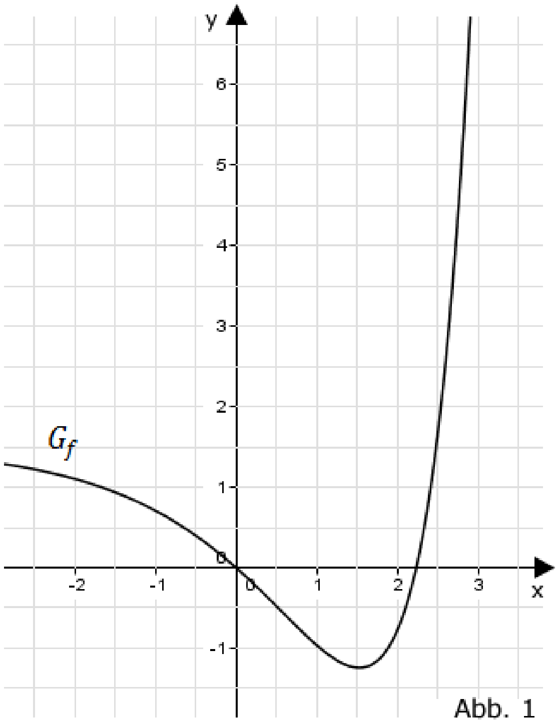

Abb. 1

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto 2x \cdot e^{-0,5x^2}$. Abbildung 2 zeigt den Graphen G_f von f.

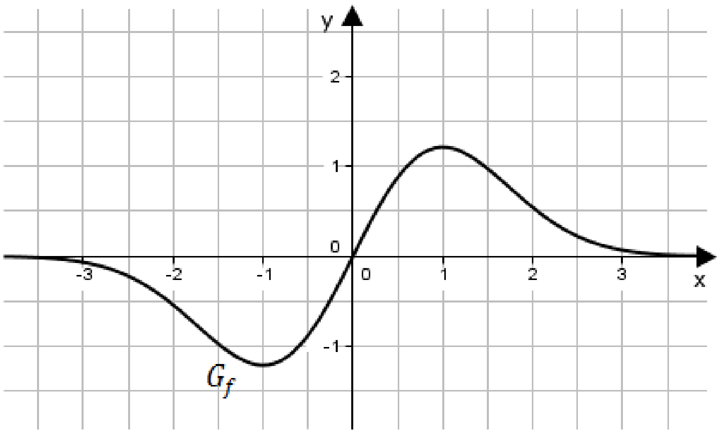

Abb. 2

Teilaufgabe Teil 2 1a (2 BE)

Weisen Sie rechnerisch nach, dass G_f punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist, und machen Sie anhand des Funktionsterms von f plausibel, dass $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ gilt.

Teilaufgabe Teil 2 1b (6 BE)

Bestimmen Sie rechnerisch Lage und Art der Extrempunkte von G_f.

(*zur Kontrolle:* $f'(x) = 2e^{-0,5x^2} \cdot \left(1 - x^2\right)$ *; y-Koordinate des Hochpunkts:* $\dfrac{2}{\sqrt{e}}$)

Teilaufgabe Teil 2 1c (4 BE)

Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate m_S von f im Intervall $[-0,5; 0,5]$ sowie die lokale Änderungsrate m_T von f an der Stelle $x = 0$. Berechnen Sie, um wie viel Prozent m_S von m_T abweicht.

Teilaufgabe Teil 2 1d (6 BE)

Der Graph von f, die x-Achse und die Gerade $x = u$ mit $u \in \mathbb{R}^+$ schließen für $0 \leq x \leq u$ ein Flächenstück mit dem Inhalt $A(u)$ ein.
Zeigen Sie, dass $A(u) = 2 - 2e^{-0,5u^2}$ gilt. Geben Sie $\lim\limits_{u \to +\infty} A(u)$ an und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.

Teilaufgabe Teil 2 1e (6 BE)

Die Ursprungsgerade h mit der Gleichung $y = \frac{2}{e^2} \cdot x$ schließt mit G_f für $x \geq 0$ ein Flächenstück mit dem Inhalt B vollständig ein.
Berechnen Sie die x-Koordinaten der drei Schnittpunkte der Geraden h mit G_f und zeichnen Sie die Gerade in Abbildung 2 ein. Berechnen Sie B.

(Teilergebnis: x-Koordinate eines Schnittpunkts: 2)

Im Folgenden wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $g_c : x \mapsto f(x) + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ betrachtet.

Teilaufgabe Teil 2 2a (2 BE)

Geben Sie in Abhängigkeit von c ohne weitere Rechnung die Koordinaten des Hochpunkts des Graphen von g_c sowie das Verhalten von g_c für $x \to +\infty$ an.

Teilaufgabe Teil 2 2b (3 BE)

Die Anzahl der Nullstellen von g_c hängt von c ab. Geben Sie jeweils einen möglichen Wert von c an, sodass gilt:

$\alpha)$ g_c hat keine Nullstelle.

$\beta)$ g_c hat genau eine Nullstelle.

$\gamma)$ g_c hat genau zwei Nullstellen.

Teilaufgabe Teil 2 2c (2 BE)

Begründen Sie für $c > 0$ anhand einer geeigneten Skizze, dass $\int\limits_0^3 g_c(x)\mathrm{dx} = \int\limits_0^3 f(x)\mathrm{dx} + 3c$ gilt.

Die Anzahl der Kinder, die eine Frau im Laufe ihres Lebens durchschnittlich zur Welt bringt, wird durch eine sogenannte Geburtenziffer angegeben, die jedes Jahr statistisch ermittelt wird.

Die Funktion $g_{1,4} : x \mapsto 2x \cdot e^{-0,5x^2} + 1,4$ beschreibt für $x \geq 0$ modellhaft die zeitliche Entwicklung der Geburtenziffer in einem europäischen Land. Dabei ist x die seit dem Jahr 1955 vergangene Zeit in Jahrzehnten (d. h. $x = 1$ entspricht dem Jahr 1965) und $g_{1,4}(x)$ die Geburtenziffer. Damit die Bevölkerungszahl in diesem Land langfristig näherungsweise konstant bleibt, ist dort eine Geburtenziffer von etwa $2,1$ erforderlich.

Teilaufgabe Teil 2 3a (4 BE)

Zeichnen Sie den Graphen von $g_{1,4}$ in Abbildung 2 ein und ermitteln Sie graphisch mit angemessener Genauigkeit, in welchem Zeitraum die Geburtenziffer mindestens $2,1$ beträgt.

Teilaufgabe Teil 2 3b (2 BE)

Welche künftige Entwicklung der Bevölkerungszahl ist auf der Grundlage des Modells zu erwarten? Begründen Sie Ihre Antwort.

Teilaufgabe Teil 2 3c (3 BE)

Im betrachteten Zeitraum gibt es ein Jahr, in dem die Geburtenziffer am stärksten abnimmt. Geben Sie mithilfe von Abbildung 2 einen Näherungswert für dieses Jahr an. Beschreiben Sie, wie man auf der Grundlage des Modells rechnerisch nachweisen könnte, dass die Abnahme der Geburtenziffer von diesem Jahr an kontinuierlich schwächer wird.