Abitur 2012 Mathematik Infinitesimalrechnung II

Teilaufgabe Teil 1 1 (3 BE)

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{x^2+4x+3}$ mit maximaler Definitionsmenge D. Bestimmen Sie D sowie die Nullstelle von f.

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $g : x \mapsto x \cdot e^{-2x}$.

Teilaufgabe Teil 1 2a (5 BE)

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts, in dem der Graph von g eine waagrechte Tangente hat.

Teilaufgabe Teil 1 2b (2 BE)

Geben Sie das Verhalten von g für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$ an.

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion $h : x \mapsto -\ln x + 3$.

Teilaufgabe Teil 1 3a (2 BE)

Geben Sie an, wie der Graph von h schrittweise aus dem Graphen der in $\mathbb{R}^+$ definierten Funktion $x \mapsto \ln x$ hervorgeht.

Teilaufgabe Teil 1 3b (4 BE)

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von h im Punkt $(1|h(1))$.

Teilaufgabe Teil 1 4a (1 BE)

Warum hat jede Integralfunktion mindestens eine Nullstelle?

Teilaufgabe Teil 1 4b (3 BE)

Geben Sie den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f an, sodass die in $\mathbb{R}$ definierte Integralfunktion $F : x \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{dt}$ genau zwei Nullstellen besitzt. Geben Sie die Nullstellen von F an.

An einer Wand im Innenhof der von Antoni Gaudi gestalteten Casa Batllo in Barcelona findet man ein Keramikkunstwerk (vgl. Abbildung 1).

Der annähernd parabelförmige obere Rand des Kunstwerks soll durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion modellhaft dargestellt werden. Auf dem Graphen sollen bei Verwendung des eingezeichneten Koordinatensystems die Punkte $A(-2|0)$, $B(2|0)$ und $C(0|5)$ liegen (1 LE entspricht 1 m, d.h. das Kunstwerk ist 5 m hoch).

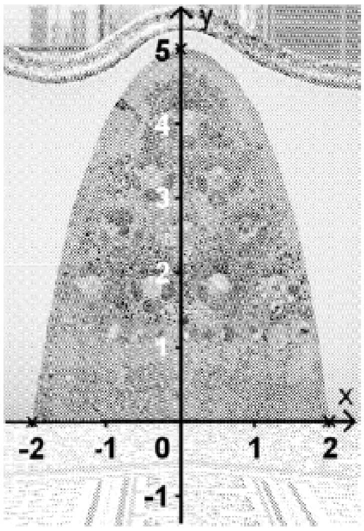

Abb.1

Teilaufgabe Teil 2 1a (3 BE)

Ermitteln Sie den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten quadratischen Funktion p, deren Graph durch die Punkte A, B und C verläuft.

(zur Kontrolle: $p(x) = -1,25x^2 + 5$)

Ein den oberen Rand des Kunstwerks genauer darstellendes Modell liefert der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion q vierten Grades mit $q(x) = -0,11x^4 - 0,81x^2 + 5$. Der Graph von q wird mit G_q bezeichnet.

Teilaufgabe Teil 2 1b (7 BE)

Weisen Sie rechnerisch nach, dass G_q symmetrisch bezüglich der y-Achse ist, durch die Punkte A und B verläuft und genau einen Extrempunkt besitzt.

Abbildung 2 zeigt die Graphen von p und q.

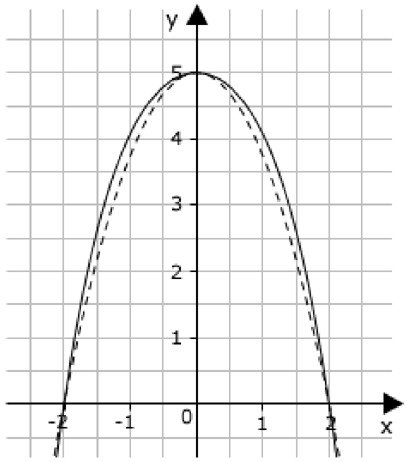

Abb.2

Teilaufgabe Teil 2 1c (2 BE)

Welcher der beiden dargestellten Graphen ist G_q ? Begründen Sie Ihre Antwort.

Teilaufgabe Teil 2 1d (5 BE)

Im Intervall $]0;2[$ gibt es eine Stelle x_0, an der der Wert der Differenz $d(x) = q(x) - p(x)$ maximal wird. Berechnen Sie x_0 sowie den Wert der zugehörigen Differenz.

Teilaufgabe Teil 2 1e (4 BE)

Berechnen Sie mithilfe der Funktion q einen Näherungswert für den Flächeninhalt A des vom Kunstwerk eingenommenen Teils der Wand.

Teilaufgabe Teil 2 1f (4 BE)

Die Gerade mit der Gleichung $y = 1,1$ teilt im Modell den vom Kunstwerk eingenommenen Teil der Wand in zwei unterschiedlich gestaltete Bereiche. Beschreiben Sie, wie man mithilfe der Funktion q das Verhältnis der Flächeninhalte dieser beiden Bereiche näherungsweise bestimmen kann. Geben Sie dazu geeignete Ansätze an und kommentieren Sie diese.

Unter dem Wasserdurchfluss eines Bachs an einer bestimmten Stelle versteht man das Volumen des Wassers, das an dieser Stelle in einer bestimmten Zeit vorbeifließt. Die Funktion f beschreibt die zeitliche Entwicklung des Wasserdurchflusses eines Bachs an einer Messstelle, nachdem zum Zeitpunkt $t = 0$ eine bachaufwärts gelegene Schleuse geöffnet wurde. Abbildung 3 zeigt den Graphen G_f von f.

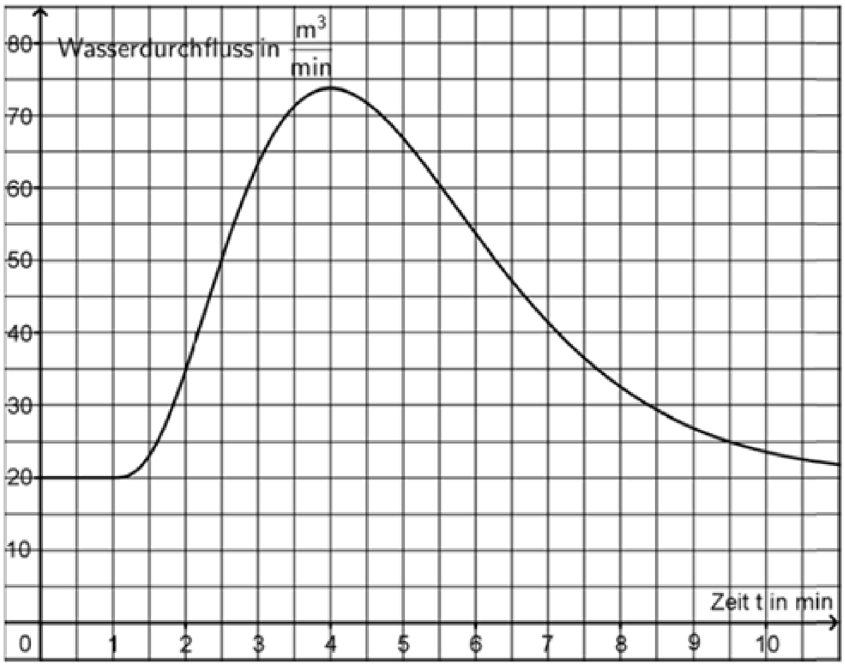

Abb.3

Teilaufgabe Teil 2 2a (5 BE)

Entnehmen Sie Abbildung 3 im Bereich $t > 1$ Näherungswerte für die Koordinaten des Hochpunkts sowie für die t-Koordinaten der beiden Wendepunkte von G_f und geben Sie unter Berücksichtigung dieser Näherungswerte die jeweilige Bedeutung der genannten Punkte im Sachzusammenhang an.

Teilaufgabe Teil 2 2b (5 BE)

Bestimmen Sie $\int_1^4 f(t)\mathrm{d}t$ näherungsweise mithilfe von Abbildung 3. Deuten Sie den Wert des Integrals im Sachzusammenhang.

Teilaufgabe Teil 2 2c (5 BE)

Bestimmen Sie mithilfe von G_f für $t = 4$ und $t = 3$ jeweils einen Näherungswert für die mittlere Änderungsrate von f im Zeitintervall $[2; t]$. Veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen in Abbildung 3 durch geeignete Steigungsdreiecke. Welche Bedeutung hat der Grenzwert der mittleren Änderungsraten für $t \to 2$ im Sachzusammenhang?