

Übung

1. Bestimme Definitions- und Lösungsmenge in $G = \mathbb{Q}$.

a) $\frac{4x-8}{8x-4} = 2$

b) $\frac{2x-1}{x+2} = \frac{8x}{2x+4}$

c) $\frac{3x+5}{2x-3} = \frac{5x-3}{3-2x}$

d) $\frac{x+1}{x} - \frac{x-1}{x+1} = 0$

e) $\frac{1}{x^2-x} - \frac{2}{x} = \frac{5}{2x-2}$

f) $\frac{x}{x+1} - 1 = \frac{2}{x-1}$

g) $\frac{x+1}{x} - \frac{x-2}{x^2-x} = \frac{2x+1}{2x}$

2. Löse nach x auf.

a) $\frac{x}{x+a} = a$

b) $\frac{1}{x+a} + \frac{a}{x} = 0$

c) $\frac{ax}{x+1} = 2$

3. Bestimme Definitions- und Lösungsmenge in $G = \mathbb{Q}$.

$$\left(\frac{x}{2x-1} - 1\right) \cdot \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = 0$$

4. Berechne den Inhalt eines Kreises mit dem Radius $r = 1,5 \cdot 10^{-4}$ mm und gib diesen Inhalt in der Einheit m^2 an.

5. Berechne

a) $(1,6 \cdot 10^{-99})^{-2} : (2,5 \cdot 10^{-102})$

b) $2^{-64} \cdot 4^{-128}$

6. Vereinfache

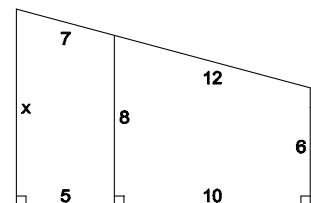
a) $\frac{a^{-3}}{a}$

b) $\frac{b}{b^{-3}}$

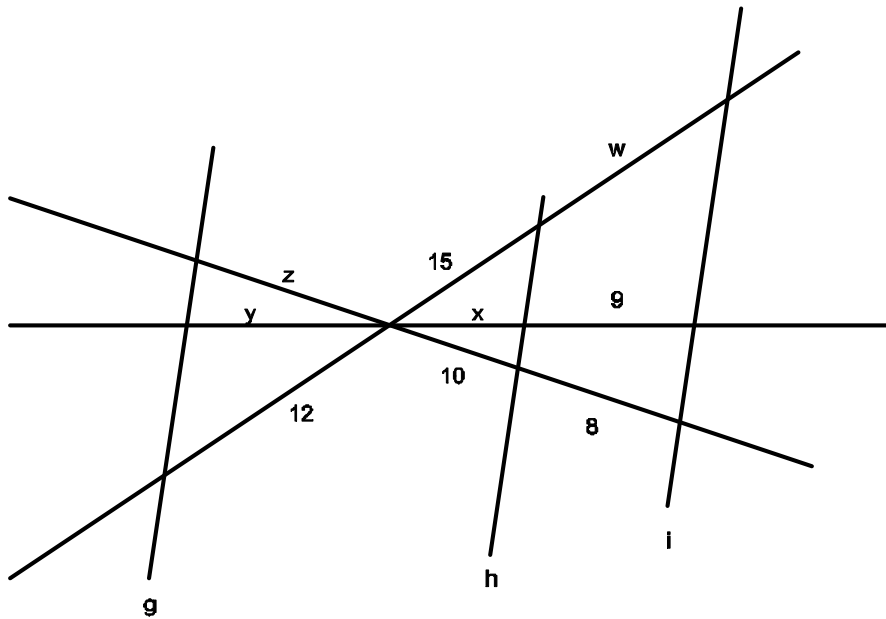
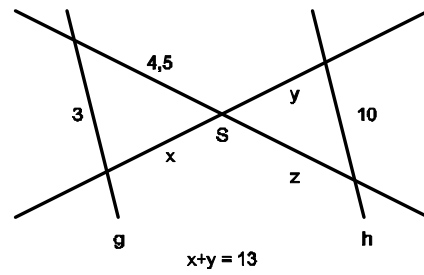
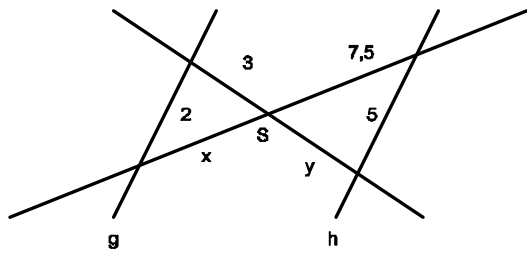
c) $(-2a^2)^{-3} + (-3a^3)^2$

d) $\frac{(-2a^3 \cdot b^{-4})^{-2}}{4^{-1} a^{-4} b^3}$

7. Berechne x.



8. Die benannten Geraden sind parallel. Berechne die fehlenden Streckenlängen.



Lösungen

1. a) $\frac{4x-8}{8x-4} = 2$

Definitionsmenge:

$$8x-4 = 0 \Leftrightarrow 8x = 4 \Leftrightarrow x = 0,5 \Rightarrow D = \mathbb{Q} \setminus \{0,5\}$$

Hauptnenner: $8x-4$

Lösungsmenge:

$$\frac{4x-8}{8x-4} = 2 \Leftrightarrow 4x-8 = 2 \cdot (8x-4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x-8 = 16x-8 \Leftrightarrow -12x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$b) \frac{2x-1}{x+2} = \frac{8x}{2x+4}$$

Faktorisierung der Nenner:

$$\frac{2x-1}{x+2} = \frac{8x}{2 \cdot (x+2)}$$

Hauptnenner: $2 \cdot (x+2)$

Definitionsmenge:

$$D = \mathbb{Q} \setminus \{-2\}$$

Lösungsmenge:

$$(2x-1) \cdot 2 = 8x \Leftrightarrow 4x-2 = 8x \Leftrightarrow -4x = 2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \quad L = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

$$c) \frac{3x+5}{2x-3} = \frac{5x-3}{3-2x}$$

Faktorisierung der Nenner:

$$\frac{3x+5}{2x-3} = \frac{5x-3}{(-1) \cdot (2x-3)} \text{ ergibt Hauptnenner } (-1) \cdot (2x-3)$$

Definitionsmenge:

$$D = \mathbb{Q} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$$

Lösungsmenge:

$$(3x+5) \cdot (-1) = 5x-3 \Leftrightarrow -3x-5 = 5x-3 \Leftrightarrow -8x = 2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$$

$$L = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$$

$$d) \frac{x+1}{x} - \frac{x-1}{x+1} = 0$$

Definitionsmenge:

$$D = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 0\}$$

Hauptnenner: $x \cdot (x+1)$

Lösungsmenge:

$$(x+1) \cdot (x+1) - (x-1) \cdot x = 0$$

$$x^2 + x + x + 1 - x^2 + x = 0 \Leftrightarrow 3x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \quad L = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$$

e) $\frac{1}{x^2 - x} - \frac{2}{x} = \frac{5}{2x - 2}$

Faktorisierung der Nenner:

$$\frac{1}{x \cdot (x-1)} - \frac{2}{x} = \frac{5}{2 \cdot (x-1)}$$

Definitionsmenge: $D = \mathbb{Q} \setminus \{0; 1\}$

Hauptnenner: $2x \cdot (x-1)$

Lösungsmenge:

$$2 - 2 \cdot 2 \cdot (x-1) = 5x \Leftrightarrow 2 - 4x + 4 = 5x \Leftrightarrow 6 = 9x \Leftrightarrow \frac{2}{3} = x \quad L = \left\{\frac{2}{3}\right\}$$

f) $\frac{x}{x+1} - 1 = \frac{2}{x-1}$

Definitionsmenge: $D = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 1\}$

Hauptnenner: $(x+1) \cdot (x-1)$

Lösungsmenge:

$$x \cdot (x-1) - 1 \cdot (x-1) \cdot (x+1) = 2 \cdot (x-1) \Leftrightarrow x^2 - x - (x^2 - x + x - 1) = 2x + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x + 1 = 2x + 2 \Leftrightarrow -1 = 3x \Leftrightarrow -\frac{1}{3} = x \quad L = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$$

g) $\frac{x+1}{x} - \frac{x-2}{x^2-x} = \frac{2x+1}{2x}$

Faktorisierung der Nenner:

$$\frac{x+1}{x} - \frac{x-2}{x \cdot (x-1)} = \frac{2x+1}{2x}$$

Defintionsmenge: $D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

Hauptnenner: $2x \cdot (x-1)$

Lösungsmenge:

$$(x+1) \cdot 2 \cdot (x-1) - (x-2) \cdot 2 = (2x+1) \cdot (x-1) \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - 2x + 2x - 2 - 2x + 4 = 2x^2 - 2x + x - 1$$

$$2 - 2x = -x - 1 \Leftrightarrow 3 = x \quad L = \{3\}$$

2. a) $\frac{x}{x+a} = a \Rightarrow x = a \cdot (x+a) \Leftrightarrow x = ax + a^2 \Leftrightarrow x - ax = a^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x \cdot (1-a) = a^2 \Rightarrow x = \frac{a^2}{1-a}$$

b) $\frac{1}{x+a} + \frac{a}{x} = 0 \Rightarrow x + a \cdot (x+a) = 0 \Leftrightarrow x + ax + a^2 = 0 \Leftrightarrow x \cdot (1+a) = -a^2$

$$\Rightarrow x = \frac{-a^2}{1+a}$$

c) $\frac{ax}{x+1} = 2 \Rightarrow ax = 2 \cdot (x+1) \Leftrightarrow ax = 2x + 2 \Leftrightarrow ax - 2x = 2 \Leftrightarrow$

$$x \cdot (a-2) = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{a-2}$$

3. $\left(\frac{x}{2x-1} - 1\right) \cdot \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = 0$

Definitionsmenge: $D = \mathbb{Q} \setminus \{\frac{1}{2}; 0; -1\}$

Das Produkt hat nur dann den Wert Null, wenn ein Faktor den Wert Null hat.

$$\frac{x}{2x-1} - 1 = 0 \Rightarrow x - 1 \cdot (2x-1) = 0 \Leftrightarrow x - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} = 0 \Rightarrow 2 \cdot (x+1) - 1 \cdot x = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

Lösungsmenge: $L = \{1; -2\}$

$$4. A = \pi \cdot (1,5 \cdot 10^{-4} \text{ mm})^2 \approx 7,1 \cdot 10^{-8} \text{ mm}^2 = 7,1 \cdot 10^{-14} \text{ m}^2$$

$$5. a) (1,6 \cdot 10^{-99})^{-2} : (2,5 \cdot 10^{-102}) = 1,6^{-2} \cdot 10^{198} : (2,5 \cdot 10^{-102}) = \\ = \frac{1}{1,6^2 \cdot 2,5} \cdot 10^{300} = 0,15625 \cdot 10^{300}$$

$$b) 2^{-64} \cdot 4^{-128} = 2^{-64} \cdot (2^2)^{-128} = 2^{-64} \cdot 2^{-256} = 2^{-320}$$

$$6. a) \frac{a^{-3}}{a} = a^{-4} \quad b) \frac{b}{b^{-3}} = b^4$$

$$c) \left(-\frac{1}{2}a^2\right)^{-3} + (-3a^{-3})^2 = -8a^{-6} + 9a^{-6} = a^{-6}$$

$$d) \frac{(-2a^3 \cdot b^{-4})^{-2}}{4^{-1}a^{-4}b^3} = \frac{0,25a^{-6}b^8}{0,25a^{-4}b^3} = a^{-2}b^5$$

$$7. \frac{x-6}{8-6} = \frac{19}{12} \Rightarrow x = 9\frac{1}{6}$$

$$8. \frac{2}{5} = \frac{x}{7,5} \Rightarrow x = 3$$

$$\frac{2}{5} = \frac{3}{y} \Rightarrow y = 7,5$$

$$\frac{3}{10} = \frac{4,5}{z} \Rightarrow z = 15$$

$$\frac{4,5}{15} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{4,5}{15} = \frac{x}{13-x} \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 10$$

$$\frac{w}{15} = \frac{8}{10} \Rightarrow w = 12$$

$$\frac{x}{9} = \frac{10}{8} \Rightarrow x = 11,25$$

$$\frac{z}{10} = \frac{12}{15} \Rightarrow z = 8$$

$$\frac{y}{11,25} = \frac{12}{15} \Rightarrow y = 9$$
