XII. Das Bernoullische Gesetz der großen Zahlen

12.1 Die Ungleichung von Tschebbyscheff für Bernoulliketten

Ist X die Anzahl der Treffer bei einer Bernoulli-Kette der Länge n, dann gilt mit der Ungleichung von Tschebbyscheff

$$\boxed{\mathbf{P(\,|X - E(X)| > \varepsilon) < \frac{npq}{\varepsilon^2}}}$$

da $\mathrm{Var}(X) = npq$

Die Zufallsgröße $\mathbf{\frac{X}{n}}$ ist dann die **relative Häufigkeit $H_n(X)$** der Treffer an. Für sie gilt dann

$$E(H_n) = E(\frac{X}{n}) = \frac{1}{n}E(X) = \frac{1}{n}np = p \quad \mathrm{Var}(H_n) = \mathrm{Var}(\frac{X}{n}) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{n^2}npq = \frac{pq}{n}$$

Anwendung der **Tschebbyscheffschen Ungleichung** ergibt

$$\boxed{\mathbf{P\left(\left|H_n(X) - E\left[H_n(X)\right]\right| > \varepsilon\right) = P\left(\left|H_n(X) - p\right| > \varepsilon\right) < \frac{pq}{n\varepsilon^2}}}$$

Ebenso gilt :

$$\boxed{\mathbf{P\left(\left|H_n(X) - E\left[H_n(X)\right]\right| \le \varepsilon\right) = P\left(\left|H_n(X) - p\right| \le \varepsilon\right) > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}}} \; 1$$

$$\boxed{\mathbf{P\left(\left|H_n(X) - E\left[H_n(X)\right]\right| \ge \varepsilon\right) = P\left(\left|H_n(X) - p\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{pq}{n\varepsilon^2}}}$$

$$\boxed{\mathbf{P\left(\left|H_n(X) - E\left[H_n(X)\right]\right| < \varepsilon\right) = P\left(\left|H_n(X) - p\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}}}$$

Beispiel :

Für a) und b) gilt :

In einer Urne befinden sich 20 rote und 80 weiße Kugeln. Man zieht 2000mal eine Kugel mit Zurücklegen.

a) Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die relative Häufigkeit der gezogenen roten Kugeln um höchstens 0,01 von der Ziehungswahrscheinlichkeit p abweicht, nach oben ab.

b) Ermitteln Sie ein zum Erwartungswert symmetrisches Intervall in dem mit mindestens 90%iger Wahrscheinlichkeit die relative Häufigkeit der gezogenen roten Kugeln liegt.

c) Wie oft muss man mindestens ziehen, damit die relative Häufigkeit der gezogenen roten Kugeln mit mehr als 99%iger Wahrscheinlichkeit um höchstens 0,01 vom Erwartungswert abweicht ?

d) Der Anteil der roten Kugeln in der der Urne wird verändert.
Wie oft muss man jetzt mindestens ziehen, damit die relative Häufigkeit der gezogenen roten Kugeln mit mehr als 99%iger Wahrscheinlichkeit um höchstens 0,01 vom Erwartungswert abweicht ?

Lösung :

a) $P\left(\left|H_n(X) - p\right| \leq \varepsilon\right) > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} = 1 - \frac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{2000 \cdot 0{,}01^2} = 0{,}2 = 20\ \%$

b) $P\left(\left|H_n(X) - p\right| \leq \varepsilon\right) > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} = 1 - \frac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{2000 \cdot \varepsilon^2} \geq 0{,}90 \Rightarrow \varepsilon \approx 0{,}0283$

$I = \left[0{,}1717\,;\,0{,}2283\right]$

c) $P\left(\left|H_n(X) - p\right| \leq \varepsilon\right) > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} = 1 - \frac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{n \cdot 0{,}01^2} \geq 0{,}99 \Rightarrow n \geq 160000$

d) $P\left(\left|H_n(X) - p\right| \leq \varepsilon\right) > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{n \cdot 0{,}01^2} \geq 0{,}99 \Rightarrow n \geq 250000$

Beachte :

Da in d) p und q unbekannt sind, muss mit $p = q = 0{,}5$ (größtmögliche Varianz) abgeschätzt werden.

Mit wachsendem n konvergiert die Varianz der relativen Häufigkeit der Treffer gegen Null. Mit der Ungleichung von Tschebbyscheff folgt dann

Satz :

Ist $H_n(A)$ die relative Häufigkeit eines Ereignisses A mit der Trefferwahrscheinlichkeit p in einer Bernoullikette und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

Dann geht die Wahrscheinlichkeit, dass die relative Häufigkeit des Eintretens von A um mehr als ε von der Wahrscheinlichkeit p abweicht , mit wachsender Versuchsanzahl n gegen Null

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} P\left(\left| H_n(A) - p \right| > \varepsilon \right) = 0}$$

Beweis :

Es ist $0 \le P\left(\left| H_n(A) - p \right| > \varepsilon \right) < \frac{pq}{n\varepsilon^2} \to 0$ mit $n \to \infty$.
