XI. Binomialverteilung

==

11.1 Definitionen

Bei vielen Zufallsexperimenten interessiert man sich lediglich für das Eintreten bzw. das Nichteintreten eines bestimmten Ereignisses.

Beispiele :

a) Glücksspiel : Treffer - Niete

b) Wahlumfrage : Wähler - Nichtwähler

c) Elektronisches Bauteil : defekt - nicht defekt

Definition :

Enthält der Ereignisraum $\mathfrak{A}$ eines Zufallsexperiments neben den trivialen Ereignissen $\varnothing$ (unmögliches Ereignis) und Ω (sicheres Ereignis) nur noch die Ereignissee T (Treffer) und $\overline{T}$ (Niete), dann liegt ein **Bernoulli-Experiment** vor.

Bemerkung :

Ist $P(T) = p$ die Trefferwahrscheinlichkeit eines Bernoulliexperiments,

dann ist $P(\overline{T}) = 1 - p = q$

Beispiel :

Experiment : Werfen eines L-Würfels

Treffer : $T = \{6\}$ Niete : $\overline{T} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Dann ist $p = P(T) = \frac{1}{6}$ sowie $q = 1 - p = 1 - P(\overline{T}) = \frac{5}{6}$

Viele Experimente bestehen aus der mehrmaligen Ausführung eines Bernoulli-Experiments.

Definition :

Die n-malige Ausführung eines Bernoulli-Experiments heißt **Bernoullikette** der Länge n, wenn gilt

1. Bei jeder Durchführung des Bernoulli-Experiments ist $P(T) = p$ und $P(\overline{T}) = q = 1 - p$.

2. Die Ereignisse T_i : Treffer bei der i.ten Durchführung des Experiments, $1 \leq i \leq n$, sind voneinander unabhängig.

Beispiel :

Bernoullikette der Länge 3 : $\Omega = \left\{ TTT,\ TT\overline{T},\ T\overline{T}TA,\ \overline{T}TT,\ T\overline{TT},\ \overline{T}T\overline{T},\ \overline{TT}t,\ \overline{TTT} \right\}$

11.2 Die Bernoullische Formel

Beispiel :

Gegeben ist eine Bernoulli-Kette der Länge 3 mit der Trefferwahrscheinlichkeit p.

Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) nur der erste Versuch ein Treffer ist, gleich

$$P(T\overline{T}\overline{T}) = p \cdot q \cdot q = pq^2$$

b) es genau einen Treffer gibt, gleich

$$P\left(T\overline{T}\overline{T} \cup \overline{T}T\overline{T} \cup \overline{T}\overline{T}T\right) = p{\cdot}q{\cdot}q + q{\cdot}q{\cdot}p + q{\cdot}q{\cdot}p = \binom{3}{1} \cdot pq^2$$

Allgemein gilt

Satz :

Gegeben sei ein Bernoullikette der Länge n und der Trefferwahrscheinlichkeit p. Ist X die Zufallsgröße, die die Anzahl der Treffer angibt, dann gilt

B 1 $\mathbf{W_X = \left\{0; 1; \ldots\ldots ; n\right\}}$

B 2 $\mathbf{B(n; p; k) := P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad 0 \le k \le n\,, q = 1 - p}$

Bemerkungen und Beispiele ::

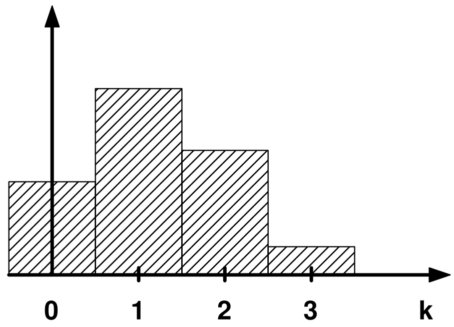
a) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Trefferzahl X einer Bernollikette der Länge n bei einer Trefferwahrscheinlichkeit p bezeichnetet man als **Binomialverteilung B(n; p)**.

Die Trefferanzahl X heißt **dann binomialverteilt**.

Binomialverteilung B(3; 0,4) :

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,216	0,432	0,288	0,064

Histogrammdarstellung :



b) Die Werte von B(n;p) finden sich für bestimmte n und p in der Stochastiktabelle. Wegen

$$\boxed{\mathbf{B(n;\, p;\, k) \;=\; B(n;\, q;\, n-k)}}$$

ist eine Angabe nur für $p \le 0{,}5$ erforderlich.

Beweis :

$$B(n;\, p;\, k) \;=\; \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \;=\; \binom{n}{n-k} q^{n-k} \cdot p^k \;=\; B(n;\, q;\, n-k).$$

So ist $B(5;\, 0{,}6;\, 2) \;=\; \binom{5}{2} 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^3 \;=\; \binom{5}{3} 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^2 \;=\; B(5;\, 0{,}4;\, 3)$

Beispiel 1 :

Ein Laplace - Würfel wird 20-mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse

A : Genau zweimal Augenzahl 2

B : Höchstens zweimal Augenzahl 2

C : Mindestens zweimal Augenzahl 2

Lösung :

$$P(A) \;=\; B(20;\, \frac{1}{6};\, 2) \;=\; \binom{20}{2} (\frac{1}{6})^2 (\frac{5}{6})^{18} \approx 19{,}8\%$$

$$P(B) \;=\; B(20;\, \frac{1}{6};\, 0) \;+\; B(20;\, \frac{1}{6};\, 1) \;+\; B(20;\, \frac{1}{6};\, 2) \approx 32{,}9\%$$

$$B(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - B(20; \frac{1}{6}) - B(20; \frac{1}{6}; 1) \approx 13{,}0\%$$

Beispiel 2 (Mindestlänge einer Bernoulli-Kette) :

Wie oft muss man einen L-Würfel **mindestens** werfen, um mit mehr als 90%-iger Wahr scheinlichkeit **mindestens** eine 1 zu würfeln ?

Lösung :

Bedingung : $P(X \geq 1) > 0{,}9$

Gegenereignis : $1 - P(X=0) > 0{,}9$

Umformung : $P(X = 0) < 0{,}1$

Bernoullische Formel : $\binom{n}{0}(\frac{1}{6})^0(\frac{5}{6})^n < 0{,}1 \quad \Leftrightarrow \quad (\frac{5}{6})^n < 0{,}1$

Logarithmieren : $n \cdot \ln\frac{5}{6} > \ln 0{,}1$

Auflösen : $n > \dfrac{\ln 0{,}1}{\ln \frac{5}{6}} \quad \Leftrightarrow \quad n > 12$

Der Würfel muss also mindestens 27 mal geworfen werden.

Allgemein gilt :

Satz :

Um bei einer Bernoulli-Kette mit mit der Trefferwahrscheinlichkeit p mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als β, $0 < \beta < 1$, mindestens einen Treffer erzielen, muss für die Länge n der Bernoullikette gelten

$$\boxed{\mathbf{n > \frac{\ln(1-\beta)}{\ln(1-p)}}}$$

Beispiel 3 (Mindestwahrscheinlichkeit) :

Wie groß muss der Anteil roter Kugeln in einer Urne mindestens sein, damit die Wahrscheinlichkeit bei 10 Ziehungen mit Zurücklegen mindestens eine rote Kugel zu ziehen, größer als 99% ist ?

Lösung :

Bedingung : $P(X \geq 1) > 0{,}99$

Gegenereignis und Umformung : $P(X = 0) < 0{,}01$

BernoullischeFormel : $(1-p)^{10} < 0{,}01 \quad \Leftrightarrow \quad p > 1 - \sqrt[10]{0{,}01} \approx 0{,}37$ (aufgerundet)

Der Anteil muss mindestens 37% betragen.

Satz :

Um bei einer Bernoulli-Kette der Länge n mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als β, $0 < \beta < 1$, mindestens einen Treffer erzielen, muss für die Trefferwahrscheinlichkeit p gelten

$$\boxed{p > 1 - \sqrt[n]{1-\beta}}$$

Beispiel 4 (Ziehen aus einer Urne mit Zurücklegen) :

In einer Urne sind 3 rote und 6 weiße Kugeln. Es wird 5-mal mit Zurücklegen gezogen.

Berechne die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse !

A : Zwei oder drei Kugeln sind rot.

B : Mindestens eine der gezogenen Kugeln ist rot und mindestens eine ist weiß.

C : Es werden mehr weiße als rote Kugeln gezogen.

Lösung :

$$P(A) = B(5; \tfrac{1}{3}; 2) + B(5; \tfrac{1}{3}; 3) = \binom{5}{2}(\tfrac{1}{3})^2(\tfrac{2}{3})^3 + \binom{5}{3}(\tfrac{1}{3})^3(\tfrac{2}{3})^2 \approx 49{,}4\%$$

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - B(5; \tfrac{1}{3}; 0) - B(5; \tfrac{2}{3}; 0) \approx 13{,}6\ \%$$

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = B(5; \frac{2}{3}; 3) + B(5; \frac{2}{3}; 4) + B(5; \frac{2}{3}; 5) \approx 79\%$$

Beispiel 5 (Kleine Stichproben aus großen Mengen)

In einer Lieferung von 200 elektronischen Bauteilen sind 10 defekte Bauteile. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Stichprobe von 20 Bauteilen 2 defekte enthalten sind, wenn

a) die Bauteile nacheinander ohne Zurücklegen getestet werden (realistischer Fall) ?

b) die Bauteile nacheinander ohne Zurücklegen getestet werden ?

Lösung :

a) $P(X=2) = \dfrac{\binom{20}{2} \cdot \binom{180}{18} \cdot}{\binom{200}{20}} \approx 19{,}75\%$

b) $P(X=2) = B(200; 0{,}05; 2) = \binom{20}{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^8 \approx 19{,}87\%$

Kleine Stichproben aus großen Mengen ohne Zurücklegen lassen sich näherungweise als Bernoulliketten behandeln.

11.3 Die Verteilungsfunktion der Binomialverteilung

Sei X die Trefferanzahl einer Bernoullikette B(n; p). Ist

$\mathbf{F_p^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad F_p^n : x \to P(X \le x)}$

die zugehörige Verteilungsfunktion , dann gilt

$$\boxed{\mathbf{F_p^n(k) = P(X \le k) = \sum_{i=0}^{k} B(n; p; i) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \quad , 0 \le k \le n , k \in \mathbb{N}}}$$

Die Verteilungsfunktion dient zur Berechnung von Summenwahrscheinlichkeiten. Es gilt

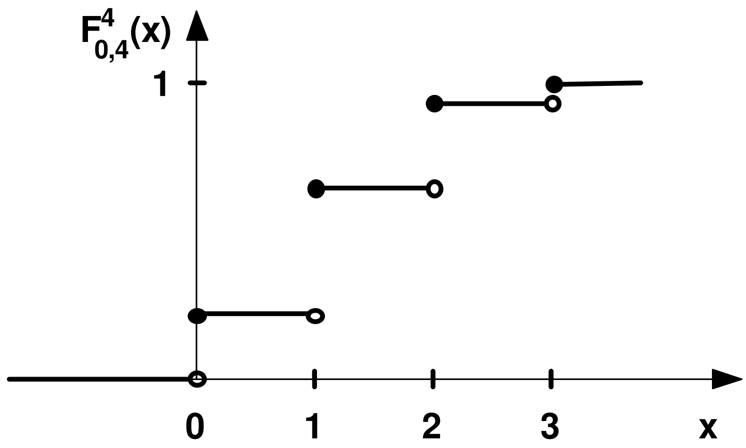
Ereignis	Berechnung mit der Verteilungsfunktion
E : Höchstens k Treffer	$\mathbf{P(X \le k) = \sum_{i=0}^{k} B(n; p; i) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} = F_p^n(k)}$
E : Weniger als k Treffer	$\mathbf{P(X < k) = P(X \le k-1) = F_p^n(k-1)}$
E : : Mehr als k Treffer	$\mathbf{P(X > k) = 1 - P(X \le k) = 1 - F_p^n(k)}$
E : Mindestens k Treffer	$\mathbf{P(X \ge k) = 1 - P(X \le k-1) = 1 - F_p^n(k-1)}$
E : Mindestens k_1 Treffer und höchstens k_2 Treffer	$\mathbf{P(k_1 \le X \le k_2) = P(X \le k_2) - P(X \le k_1 - 1) =}$ $\mathbf{= F_p^n(k_2) - F_p^n(k_1 - 1)}$

Bemerkungen und Beispiele :

a) Für häufig gebrauchte n und p-Werte finden sich die Werte von F_p^n in der Stochastiktabelle.

b) Der Graph der Verteilungsfunktion F_p^n ist eine Treppenkurve

Für $F_{0,4}^4$ erhält man



Beispiel 1 :

Experiment :Ein L-Würfel wird 100-mal geworfen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sechs

a) weniger als 10mal

b) mehr als 20mal

c) mehr als 10 und höchstens 20mal

nach oben zu liegen kommt ?

Lösung :

a) $P(X < 10) = P(X \leq 9) = F^{100}_{\frac{1}{6}}(9) \approx 2{,}1\ \%$

b) $P(X > 20) = 1 - P(X \leq 20) = 1 - F^{100}_{1/6} \approx 1 - 0{,}84811 \approx 15{,}2\%$

c) $P(10 \leq X \leq 20) = P(X \leq 20) - P(X \leq 9) \approx 0{,}84811 - 0{,}02129 \approx 73{,}8\ \%$

Beispiel 2 :

Eine L-Tetraeder wird 100mal geworfen. Bestimmen Sie mit Hilfe der Stochastiktabelle ein möglichst kleines Intervall der Form $\left[25 - k;\ 25 + k\right]$, in dem mit mehr als 90% Wahrscheinlichkeit die Anzahl der geworfenen Einsen liegt.

Lösung :

Es muss gelten $P(25 - k \leq X \leq 25 + k)\ >\ 0{,}90 \iff F^{100}_{0,25}(25 + k)\ -\ F^{100}_{0,25}(25 - k - 1)\ >\ 0{,}90$

Ausschnitt aus der Stochastiktabelle :

<table>
<tr><th>p
k</th><th>0,25</th><th></th></tr>
<tr><td>17</td><td>0,03762</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>18</td><td>0,06301</td></tr>
<tr><td>19</td><td>0,09953</td></tr>
<tr><td>20</td><td>0,14883</td><td rowspan="10">Es ist $k_{min} = 7$ mit

$P(18 \le X \le 32) = F_{0,25}^{100}(32) - F_{0,25}^{100}(17) = 0,95540 - 0,03763 \approx 91,8\%$

Damit liegt mit mehr als 90% Wahrscheinlichkeit die Anzahl der Einsen im Intervall $\left[18; 32\right]$..</td></tr>
<tr><td>21</td><td>0,21144</td></tr>
<tr><td>22</td><td>0,28637</td></tr>
<tr><td>23</td><td>0,37108</td></tr>
<tr><td>24</td><td>0,46167</td></tr>
<tr><td>25</td><td>0,55347</td></tr>
<tr><td>26</td><td>0,64174</td></tr>
<tr><td>27</td><td>0,72238</td></tr>
<tr><td>28</td><td>0,79246</td></tr>
<tr><td>29</td><td>0,85046</td></tr>
<tr><td>30</td><td>0,89621</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>31</td><td>0,93065</td></tr>
<tr><td>32</td><td>0,95540</td></tr>
</table>

13.4 Erwartungswert und Varianz der Binomialverteilung

Betrachtet man eine Bernoulli-Kette mit der Länge $n = 1$ und gibt die Zufallsgröße X_1 die Trefferanzahl an, dann gilt

$$W_{X_1} = \{0; 1\}$$

$$E(X_1) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

$$Var(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2 = 0^2 \cdot p + 1^2 \cdot p - p^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

Hat die Bernoulli-Kette die Länge $n > 1$ und ist X die Anzahl der Treffer, dann gilt :

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

mit X_i : Trefferanzahl beim i-ten Versuch $(1 \leq i \leq n)$.

Dabei ist $W_{X_i} = \{0; 1\}$, $E(X_i) = p$ und $Var(X_i) = pq$.

Wegen der Unabhängigkeit der X_i folgt

Satz :

Für den Erwartungswert und die Varianz der Trefferanzahl X einer Bernoullikette gilt

$$\boxed{\mathbf{E(X) = np}} \qquad \boxed{\mathbf{Var(X) = npq}}$$

Beispiel :

Gegeben ist ein Urne mit 4 roten und 6 weisse Kugeln.

Experiment : 10malige Ziehen einer Kugel mit Zurücklegen

Zufallsgröße X : Anzahl der gezogenen roten Kugeln

X ist binomialverteilt. Daher gilt

$n = 10 \;\; p = 0{,}4 \;\Rightarrow\; E(X) = 10 \cdot 0{,}4 = 4 \;\; Var(X) = 10 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 2{,}4$

Bemerkungen :

a) Der Erwartungswert einer Zufallsgröße muss nicht in ihrer Wertemenge liegen liegen.

Experiment : 10-maliges Werfen eines Laplace-Würfels

Zufallsgröße X : Anzahl der Sechsen

Es ist $E(X) = 10 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$

b) Die wahrscheinlichste Trefferanzahl ist der Erwartungswert oder liegt in der Nähe des Erwartungswerts.

Für die **wahrscheinlichste Trefferanzahl** bei einer Bernoullikette der Länge n und der Trefferwahrscheinlichkeit p gilt :

Fall A : $np - q$ ist nicht ganzzahlig

Die maximale Trefferwahrscheinlichkeit ergibt sich für $k = \left\lfloor np - q \right\rfloor + 1 = \text{INT}(np - q) + 1$

Dabei ist $\left\lfloor np - q \right\rfloor = \text{INT}(np - q)$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich $np - q$ ist.

Fall B : $np - q$ ist ganzzahlig

Die maximale Trefferwahrscheinlichkeit ergibt sich für $k = np - q$ und $k = np - q + 1$

Beispiele :

a) Ist $n = 20$ und $p = 0{,}25$, dann ergibt sich für $k = \left\lfloor 20 \cdot 0{,}25 - 0{,}75 \right\rfloor + 1 = 5$ Treffer die

größte Wahrscheinlichkeit. Es ist $B(20;\ 0{,}25;\ 5) \approx 20{,}23\%$.

Zum Vergleich : $B(20;\ 0{,}25;\ 4) \approx 18{,}97\%$ und $B(20;\ 0{,}25;\ 6) \approx 16{,}86\%$.

b) Ist $n = 19$ und $p = 0{,}25$, dann ergibt sich die größte Trefferwahrscheinlichkeit für

$k = 4$ und $k = 5$. Es ist $B(19;\ 0{,}25;\ 4) = B(19;\ 0{,}25;\ 5) \approx 20{,}23\%$.

c) Analoges gilt, bei der Bestimmung der Länge n einer Benoullikette so, dass k Treffer am wahrscheinlichsten sind.

Hat ein Bernoulliexperiment die Trefferwahrscheinlichkeit p, dann sind k **Treffer** bei einer zugehörigen Bernoullikette **am wahrscheinlichsten** bei

a) $n = \left[\frac{k-p}{p}\right]$ Versuchen, falls $\frac{k-p}{p}$ nicht ganzzahlig ist

b) $n = \frac{k-p}{p}$ und $n = \frac{k-p}{p} + 1$ Versuchen, falls $\frac{k-p}{p}$ ganzzahlig ist.

Beispiel :

Ist $k = 5$ und $p = 0{,}25$, dann ergibt sich diese Trefferzahl am wahrscheinlichsten bei

$\frac{5 - 1 + 0{,}75}{1 - 0{,}75} = 19$ bzw. 20 Versuchen.

c) Die **Varianz** der Trefferanzahl einer Bernoullikette der festen Länge n ist dann am größten,

wenn $\mathbf{p = q = 0{,}5}$

Beweis :

Es ist $\mathrm{Var}(X) = npq = np(1-p) = np - np^2$,

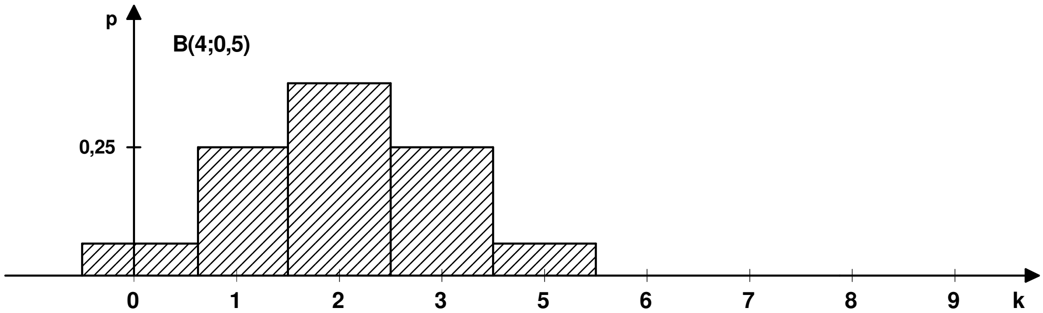
d.h. die Varianz der Zufallsgröße Trefferzahl einer Bernoullikette der Länge n ist eine quadratische Funktion der Trefferwahrscheinlichkeit p.

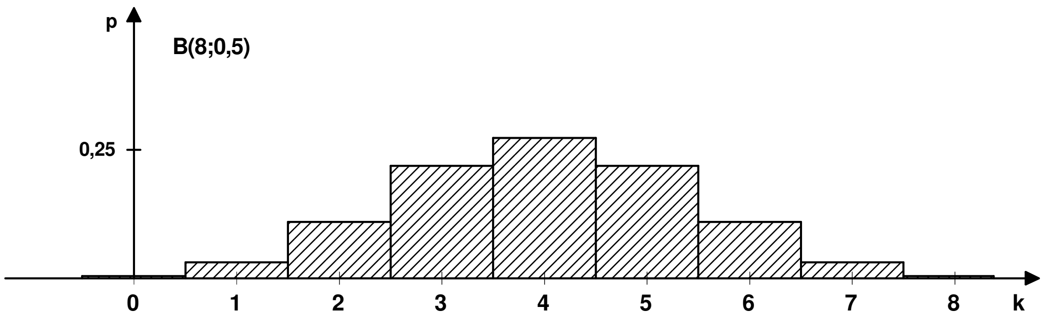
Es ist $\frac{d\mathrm{Var}(X)}{dp} = 2np - n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{1}{2}$ (Maximum)

11.5 Die Binomialverteilung in Abhängigkeit von n und p

---

a) p = 0,5

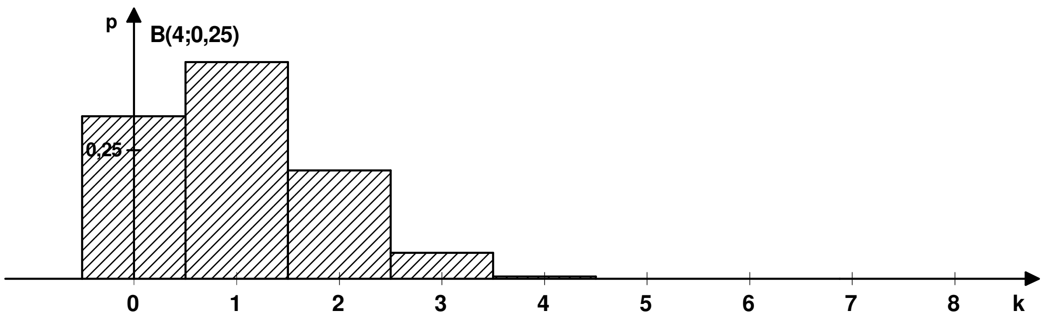


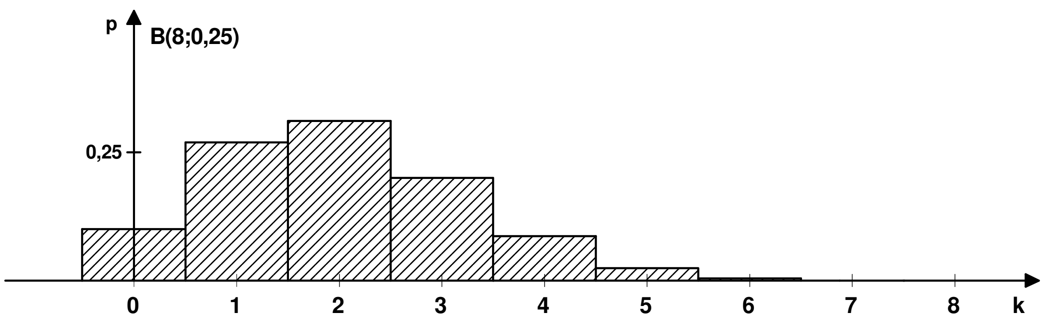


Mit zunehmender Länge n der Bernoullikette zerfließt das Histogramm immer mehr.

Die Histogramme sind symmetrisch zur Geraden k = E(X).

b) p = 0,25





Bei gleichem n sind die wahrscheinlichste Trefferanzahl und Varianz für $p = 0{,}25$ kleiner als für als für $p = q = 0{,}5$.

Die Histogramme sind nicht symmetrisch, nehmen allerdings mit zunehmender Versuchsanzahl immer mehr symmetrische Gestalt an.

c) $p = 0{,}75$

Die Histogramme sind Spiegelbilder zu den Histogrammen mit $p = 0{,}25$.