X. Zufallsgrößen

===

10.1 Zufallsgrößen und ihr Erwartungswert

Beispiel :

Experiment : Dreimaliges Werfen einer Münze

Ergebnisraum : $\Omega = \{ZZZ, ZZK, ZKZ, KZZ, ZKK, KZK, KKZ, KKK\}$

Zufallsgröße $X : \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad X : \omega \to$ Anzahl der geworfenen K`s

Wertetabelle von X :

ω	ZZZ	ZZK	ZKZ	KZZ	ZKK	KZK	KKZ	KKK
$x = X(\omega)$	0	1	1	1	2	2	2	3

d.h. die Wertemenge von X ist $W_X = \{0, 1, 2, 3\}$.

Jeder Wert x von X wird mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit $P(X = x)$ angenommen.
Aus obiger Tabelle ergibt sich

x	0	1	2	3
P(X=x)	1/8	3/8	3/8	1/8

Die mittlere Anzahl der K's pro Versuch beträgt $0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1{,}5$

.

Definition :

Sei Ω der Ergebnisraum eines Zufallsexperiments. Eine Abbildung

$\mathbf{X : \Omega \to \mathbb{R} \qquad X : \omega \to X(\omega) \in \mathbb{R}}$

mit der Wertemenge $W_X = \{x_1; x_2; \ldots\ldots ; x_m\}$ heißt eine **Zufallsgröße**.

Ist P das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß, dann nennt man

$$\mathbf{w : W_X \to \mathbb{R} \qquad w : x \to P(X = x) = P\left(\left\{\omega \,\middle|\, X(\omega) = x\right\}\right)}$$

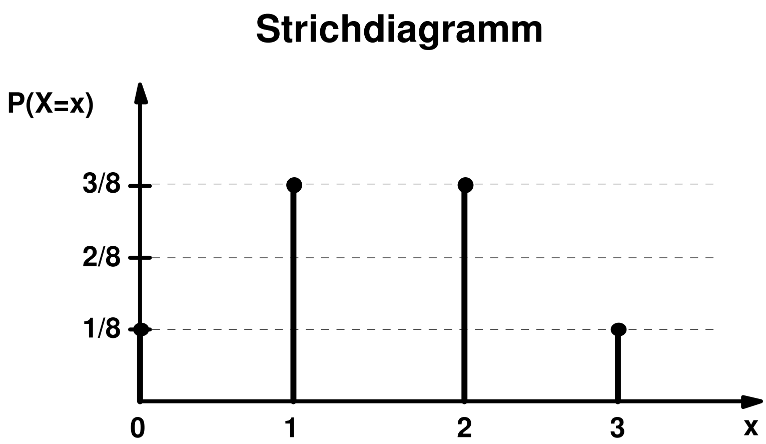
die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** der Zufallsgröße X. Die Größe

$$\boxed{\mathbf{E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot P(X = x_i)}}$$

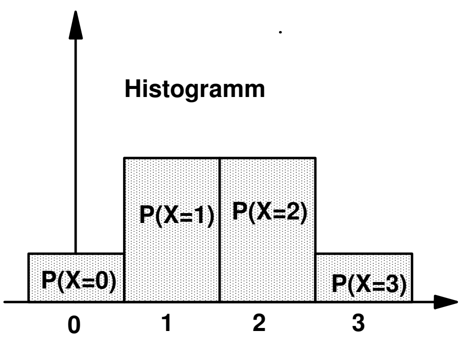
heißt **Erwartungswert** von X

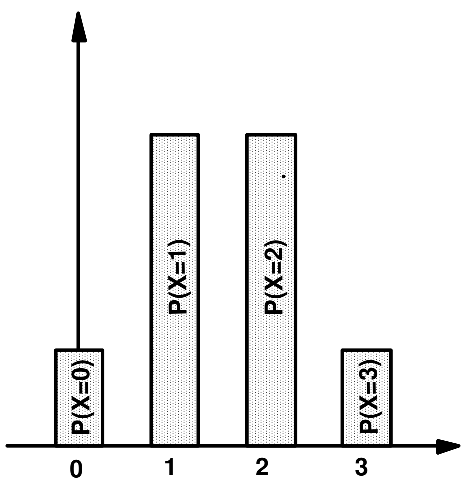
Veranschaulichung der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße :

1. Das **Strichdiagramm**



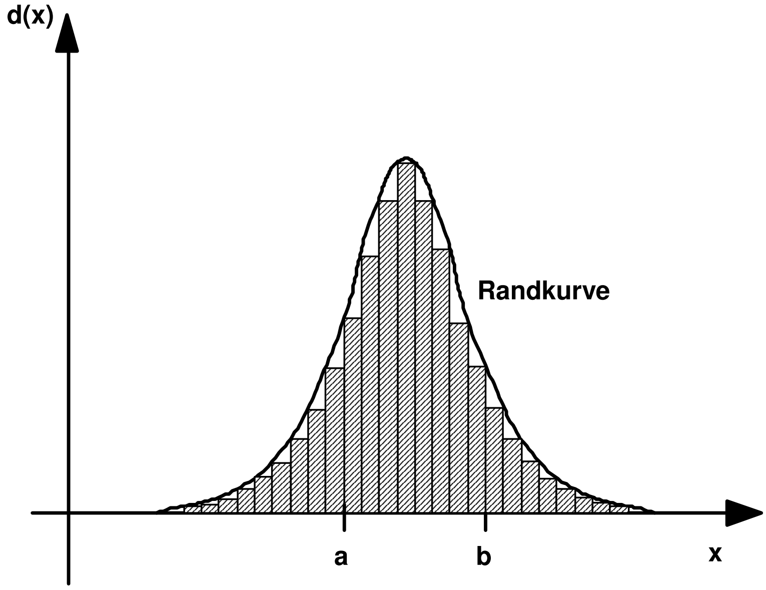
2. **Histogramme**





Bei der Histogrammdarstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße wird um jeden Wert x, den die Zufallsgröße annimmt, nach oben ein Rechteck gelegt, dessen Flächenmaßzahl gleich der Wahrscheinlichkeit $P(X = x)$ ist.

Die Breite der Rechtecke eines Histogramms kann verschieden gewählt werden. Die Höhe der Rechtecke ist dann entsprechend zu ändern.



Nimmt eine Zufallsgröße sehr viele bzw. unendlich viele Werte an und rücken diese beliebig nahe aneinander, dann nähert sich die obere Berandung der Histogramme dem Graphen einer Funktion d an.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße einen bestimmten Wert annimmt ist sehr gering. Für die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße einen Wert im Intervall $\left[a; b\right]$ annimmt gilt näherungsweise

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b d(x)dx$$

d(x) heißt **Wahrscheinlichkeitsdichte** der Zufallsgröße X.

10.2 Die Verteilungsfunktion

Beispiel :

Experiment : Einmaliges Werfen zweier L-Würfel

Ergebnisraum : $\Omega = \left\{1, 2, 3, 4, 5, 6\right\}^2$

Zufallsgröße X : Augensumme

Wahrscheinlichkeitsverteilung :

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X = x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Die Wahrscheinlichkeit $P(X \le 5)$, dass die gewürfelte Augensumme höchstens 5 ist, dann gegeben durch

$$P(X \le 5) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

Die Wahrscheinlichkeiten, dass eine Zufallsgröße Werte in einem bestimmten Bereich annimmt wie z. B

$P(a \le X \le b)$ bzw. $P(a < X < b)$ etc.

können mit durch Wahrscheinlichkeiten der Form $P(X \le k)$ ausgedrückt werden. So gilt

a) $P(X > k) = 1 - P(X \le k)$

b) $P(X < k) = P(X \le k - 1)$

c) $P(k_1 \le X \le k_2) = P(X \le k_2) - P(X \le k_1 - 1)$

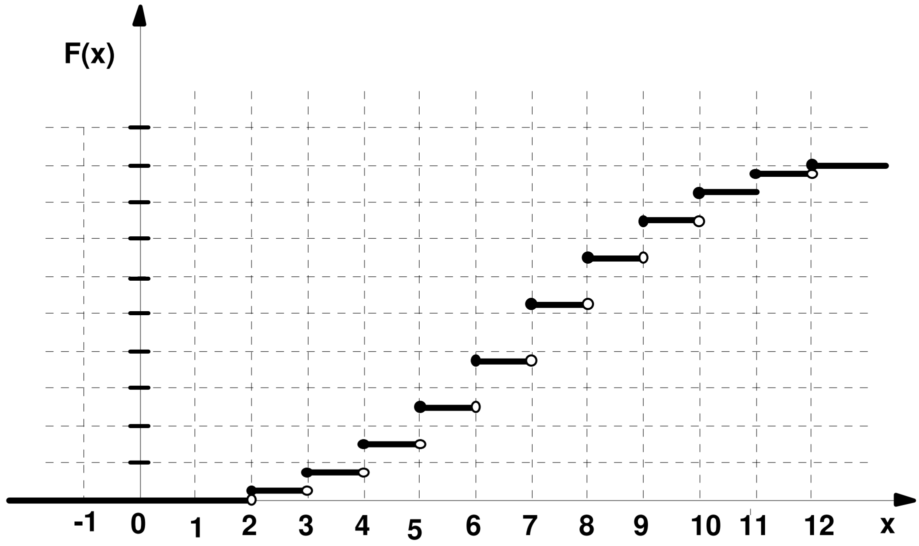
Definition :

Sei X eine auf einem Ergebnisraum Ω definierte Zufallsgröße. Dann heißt die Funktion

$\mathbf{F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ mit $\mathbf{F : x \to F(x) = P(X \le x)}$

die **Verteilungsfunktion** der Zufallsgröße X.

Graph der Verteilungsfunktion des Beispiels :



Eigenschaften der Verteilungsfunktion :

Sei X eine Zufallsgröße mit der Wertemenge $W_X = \left\{ x_1; x_2; .... ; x_m \right\}$.

Dann gilt

1. $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$. Speziell ist $F(x) = 1$ falls $x \geq x_m$.

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$. Speziell ist $F(x) = 0$ falls $x < x_1$

3. F ist eine monoton steigende Treppenfunktion, die an den endlich vielen Sprungstellen $x_1, x_2, ... , x_m$ rechtseitig stetig ist.

   Es gilt $F(x_{i+1}) = F(x_i) + P(X = x_{i+1})$

4. Sind $a, b \in \mathbb{R}$, dann gilt

   (1) $\boxed{P(a < x \leq b) = \sum\limits_{a < x_i \leq b} P(X = x_i) = F(b) - F(a)}$

   (2) $\boxed{P(x > a) = \sum\limits_{x_i > a} P(x_i) = 1 - P(x \leq a) = 1 - F(a)}$

10.3 Funktionen einer Zufallsgröße

Zwei Laplace-Tetraederwürfel sind mit 1, 1, 1, 2 beschriftet.

Experiment (Glückspiel) : Werfen der beiden Würfel bei einem Einsatz von 2 €

Zufallsgröße $X : \Omega \to \mathbb{R}$ $X : \omega \to$ Produkt der Augenzahlen

Wahrscheinlichkeitsverteilung von X :

x	1	2	4
P(X = x)	9/16	6/16	1/16

$$E(X) = 1 \cdot \frac{9}{16} + 2 \cdot \frac{6}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{25}{16}$$

Der Gewinn errechne sich nach der Gewinnfunktion : $g : W_X \to \mathbb{R}$, $g : x \to 2 \cdot x - 2$.

Die Funktion $Y = g \odot X : \Omega \to \mathbb{R}$ ist ebenfalls eine Zufallsgröße.

Man sagt , g sei eine Funktion der Zufallsgröße X und schreibt kurz $Y = g(X)$.

Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y .

y	1	2	6
P(Y = y)	9/16	6/16	1/16

Es ist : $E(Y) = 0 \cdot \frac{9}{16} + 2 \cdot \frac{6}{16} + 6 \cdot \frac{1}{16} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$.

d.h. das Spiel ist nict fair; da der Einsatz kleiner dem Erwartungswert des Gewinns ist.

Definition :

Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine auf einem Ergebnisraum Ω definierte Zufallsgröße mit der Wertemenge W und $g : W \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Dann ist durch $g \odot X$ eine neue Zufallsgröße Y definiert.

Y heißt Funktion der Zufallsgröße X. Man schreibt

$$\boxed{\mathbf{Y = g(X)}}$$

Sonderfall :

Ist X eine Zufallsgröße, a, b $\in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.,

dann heißt $Y = aX + b$ eine lineare Funktion der Zufallsgröße X.

Für ihren Erwartungswert gilt

$$\boxed{\mathbf{E(Y) = E(aX + b) = a \cdot E(X) + b}}$$

Beweis : trivial

Anwendung :Gewinn G und Reingewinn R beim Glückspiel.

Ist b der Einsatz pro Spiel, dann ist $R = G - b$.

10.4 Varianz und Streuung

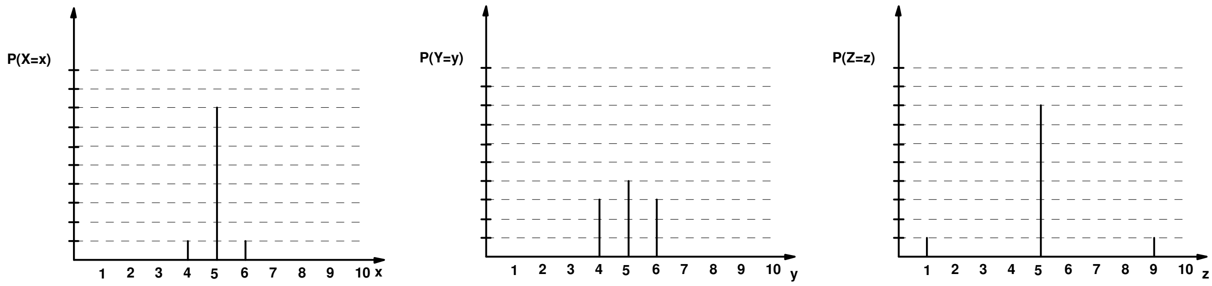
Gegeben seien die Zufallsvariablen X, Y und Z mit den Wahrscheinlichkeitsverteilungen

x	4	5	6
P(X = x)	0,1	0,8	0,1

y	4	5	6
P(Y = y)	0,3	0,4	0,3

z	1	5	8
P(Z = z)	0,1	0,8	0,1

Strichdiagramme :



E(X) = E(Y) = E(Z) (Symmetrie)

Trotzdem ist bei der Ausführung der zugehörigen Experimente eine Abweichung der Zufallsgröße Y vom Erwartungswert wahrscheinlicher und bei der Zufallsgröße Z größer als bei der Zufallsgröße X.

Diese Verschiedenartigkeit der Verteilungen charakterisiert man durch die **Varianz** einer Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Definition :

X sei eine Zufallsgröße mit dem Erwartungswert $\mu = E(X)$.

Dann beschreibt die Zufallsgröße $(X-\mu)^2$ den quadratischen Abstand vom Mittelwert. Ihren Erwartungswert nennt man **Varianz** von X.

$$\boxed{\mathbf{Var(X) := E[(X-\mu)^2]}}$$

$\sigma = \sqrt{\mathbf{Var(X)}}$ die **Standardabweichung** (**Streuung**) von X.

Es gilt also $\boxed{\mathbf{Var(X) = \sum_{i=1}^{m} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)\ , \quad W_X = \{x_1, \dots , x_m\}}}$

Bemerkungen :

1. Varianz einer konstanten Zufallsgröße

$$\boxed{\mathbf{Var(X=c)\ =\ Var(c)\ =\ 0}}$$

2. Formel für die Varianz

Leichter berechnet sich die Varianz einer Zufallsgröße X mit dem Erwartungswert μ mit

$$\boxed{\mathbf{Var(X)=E(X^2)-\mu^2}}$$

Beweis :

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu)^2\cdot P(X=x_i) = = \sum_{i=1}^{m}(x_i^2-2x_i\mu-\mu^2)\cdot P(X=x_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}x_i^2P(X=x_i) - 2\mu\sum_{i=1}^{m}x_iP(X=x_i) + \mu^2\sum_{i=1}^{m}P(X=x_i) = E(X^2) - 2\mu\cdot\mu + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2$$

Anwendung auf das Einführungsbeispiel :

$$Var(X) = 4^2\cdot 0{,}1 + 5^2\cdot 0{,}8 + 6^2\cdot 0{,}1 - 5^2 = 0{,}2 \Rightarrow \sigma_X \approx 0{,}4472$$

Analog ergibt sich $Var(Y) = 0{,}6 \Rightarrow \sigma_y \approx 0{,}7746$ und $Var(Z) = 3{,}2 \Rightarrow \sigma_Z \approx 1{,}7889$

3. Varianz einer lineare Funktion einer Zufallsgröße

Ist X eine Zufallsgröße und sind $a, b \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\boxed{\mathbf{Var(aX+b)\ =\ a^2Var(X)}}$$

Beweis : Nachrechnen

Anwendung :Standardisierung einer Zufallsgröße

Definition :

Ist X eine Zufallsgröße mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung $\sigma > 0$, dann heißt die Zufallsgröße

$$\boxed{\mathbf{T := \frac{X - \mu}{\sigma}}}$$

die **Standardisierung** von X.

Satz :

Es gilt $\mathbf{E(T) = 0}$ und $\mathbf{Var(T) = 1}$

Beweis : Nachrechnen

Beispiel :

Experiment : Werfen zweier L-Tetraederwürfel

Zufallsgröße : Augensumme

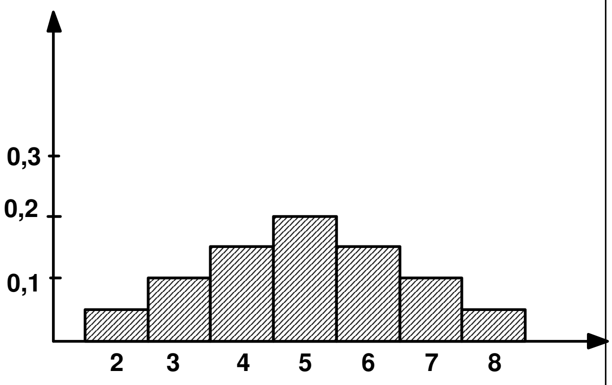
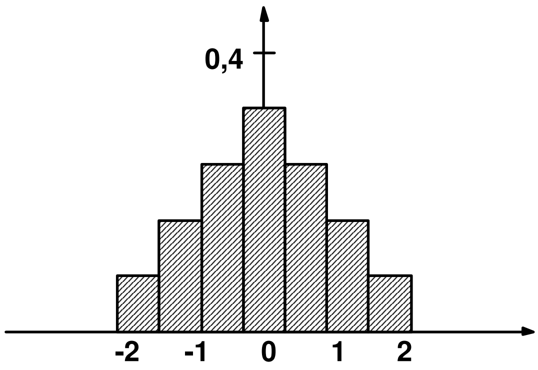
Wahrscheinlichkeitsverteilung von X :

x	2	3	4	5	6	7	8
$P(X = x)$	1/16	2/16	3/16	4/16	3/16	2/16	1/16

$E(X) = 5 \quad Var(X) = 2{,}5 \quad \sigma = \sqrt{Var(X)} \approx 1{,}58$

$t = \frac{x - \mu}{\sigma}$	-1,9	-1,3	-0,6	0	0,6	1,3	1,9

Wählt man 1 als Histogrammbreite für die Wahrscheinlichkeitsverteiltung von X, dann beträgt die Histogrammbreite für die Standardisierung $\frac{1}{\sigma}$. Entsprechend wächst die Höhe auf das $\sigma-$fache.

Wahrscheinlichkeitsverteilung von X	Wahrscheinlichkeitsverteilung der Standardisierung
 	

10.5 Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung zweier Zufallsgrößen

---

Beispiel :

Experiment : Zweimaliges Werfen eines Laplace-Tetraeder

Zufallsgröße X : Minimum der Augenzahlen

Zufallsgröße Y : Augenzahl beim 1.Wurf

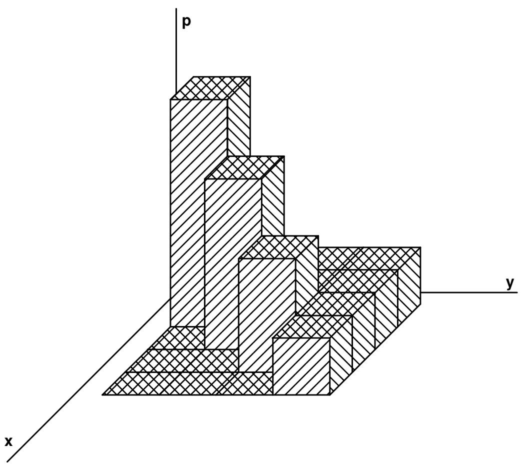
Wahrscheinlichkeitsverteilung bzw. Wahrscheinlichkeitsfunktion von X bzw. Y

x	1	2	3	4
P(X = x)	7/16	5/16	3/16	1/16

y	1	2	3	4
P(Y = y)	1/4	1/4	1/4	1/4

Sie gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung gibt die Wahrscheinlichkeiten an die die Zufallsgröße X den Wert x und Y den Wert y annimmt.:

y/x	1	2	3	4	
1	4/16	0	0	0	**1/4**
2	1/16	3/16	0	0	**1/4**
3	1/16	1/16	2/16	0	**1/4**
4	1/16	1/16	1/16	1/16	**1/4**
	7/16	**5/16**	**3/16**	**1/16**	



Meist sind auf dem Ergebnisraum eines Zufallexperiments mehrere Zufallsgrößen definiert. Zwischen diesen Zufallsgrößen können Abhängigkeiten bestehen.

Definition :

Seien X und Y auf demselben Ergebenisraum Ω eines Zufallexperiments definierte Zufallsg rößen und

$w_X : W_X \to \mathbb{R} \qquad w_X : x \to P(X=x) \quad w_Y : w_Y \to \mathbb{R} \qquad w_Y : y \to P(Y=y)$

seien die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

Dann heißt

$\mathbf{w_{XY} : W_X \times W_Y \to \mathbb{R} \quad w_{XY} : (x,y) \to P(X=x \wedge Y=y)}$

die **gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung** dieser Zufallsgrößen.

Satz von den Randwahrscheinlichkeiten :

Ist $W_X = \left\{ x_1; \ldots; x_m \right\}$ und $W_Y = \left\{ y_1; \ldots; y_n \right\}$, dann gilt

$$\boxed{\mathbf{P(X = x_i) = \sum_j P(X = x_i \wedge Y = y_j)}} \qquad \boxed{\mathbf{P(Y = y_j) = \sum_i P(X = x_i \wedge Y = y_j)}}$$

Der Begriff der Unabhängigkeit wird auf Zufallsgrößen ausgedehnt.

Definition :

Die Zufallsgrößen X und Y heißen **unabhängig** voneinander, wenn für ihre gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung gilt

$$\boxed{\mathbf{P(X = x_i \wedge Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j) \quad \forall\, i, j,\ 1 \le i \le m, 1 \le j \le n}}$$

Beispiel :

Experiment : Werfen zweier Laplace-Würfel

Ergebnisraum : $\Omega = \left\{1, 2, 3, 4, 5, 6\right\}^2$

$X : \Omega \to \mathbb{R} \quad X : \omega \to$ Augenzahl des 1. Wurfs

$Y : \Omega \to \mathbb{R} \quad X : \omega \to$ Augenzahl des 2. Wurfs

X und Y sind voneinander unabhängig, denn

$$P(X = i \wedge Y = j) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \quad 1 \leq i, j \leq n$$

10.6 Summe und Produkt von Zufallsgrößen

Beispiel :

Experiment : Zweimaliges Werfen eines Tetraederwürfels

$X : \Omega \to \mathbb{R}$

$X : \omega \to$ Augenzahl des 1. Wurfs

$Y : \Omega \to \mathbb{R}$

$Y : \omega \to$ Augenzahl des 2. Wurfs :

Summe und Produkt dieser zwei Zufallsgrößen sind definiert durch

$X + Y : \Omega \to \mathbb{R}$, $X + Y : \omega \to X(\omega) + Y(\omega)$

bzw.

$X \cdot Y : \Omega \to \mathbb{R}$, $X \cdot Y : \omega \to X(\omega) \cdot Y(\omega)$

Es ist $E(X) = E(Y) = 2{,}5 \quad Var(X) = Var(Y) = \frac{5}{4}$

x/y	**1**	**2**	**3**	**4**
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

x/y	**1**	**2**	**3**	**4**
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16

Wahrscheinlichkeitsverteilungen :

$x+y$	2	3	4	5	6	7	8
$P(Y+Y=x+y)$	1/16	2/16	3/16	4/16	3/16	2/16	1/16

$x \cdot y$	1	2	3	4	6	8	9	12	16
$P(X \cdot Y = x \cdot y)$	1/16	2/16	2/16	3/16	2/16	2/16	1/16	2/16	1/16

Damit ergibt sich

$$E(X+Y) = 2\cdot\frac{1}{16}+3\cdot\frac{2}{16}+4\cdot\frac{3}{16}+5\cdot\frac{4}{16}+6\cdot\frac{3}{16}+7\cdot\frac{2}{16}+8\cdot\frac{1}{16} = 5 = E(X)+E(y)$$

$$\text{Var}(X+Y) = 2{,}5 = \text{Var}(x)+\text{Var}(y)$$

$$E(X\cdot Y) = \frac{25}{4} = E(X)\cdot E(Y)$$

$$\text{Var}(X\cdot Y) = 30{,}25$$

Definition und Satz :

Seien X und Y zwei auf demselben Ergebnisraum Ωdefinierte Zufallsgrößen und $a, b \in \mathbb{R}$.

Dann heißen

$$X+Y : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mit } (X+Y)(\omega) = X(\omega)+Y(\omega)$$

Summe und

$$X\cdot Y : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mit } (X\cdot Y)(\omega) = X(\omega)\cdot Y(\omega)$$

Produkt der Zufallsgrößen X und Y.

Allgemein gilt

$$\boxed{\mathbf{E(a\cdot X + b\cdot Y) = a\cdot(X) + b\cdot E(Y)}}$$

Speziell gilt also

$$\boxed{\mathbf{E(X + Y) = E(X) + E(Y)}}$$

Sind X und Y **unabhängig** voneinander, dann gilt auch

$$\boxed{\mathbf{Var(X+Y) = Var(X)+Var(Y)}} \text{ und } \boxed{\mathbf{E(X\cdot Y) = E(X)\cdot E(Y)}}$$

Bemerkung :

Für $\text{Var}(X\cdot Y)$ lässt sich keine Aussage treffen.

10.7 Die Ungleichung von Tschebbyscheff

Je größer die Varianz einer Zufallsgröße desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Wert; den die Zufallsgröße bei der Ausführung des Zufallsexperiments erhält, stärker vom Erwartungswert abweicht. Eine Abschätzung gibt

Satz :

Ist X eine Zufallsgröße mit dem Erwartungswert μ und $\mathrm{Var}(X) > 0$ und ist $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$,dann gilt

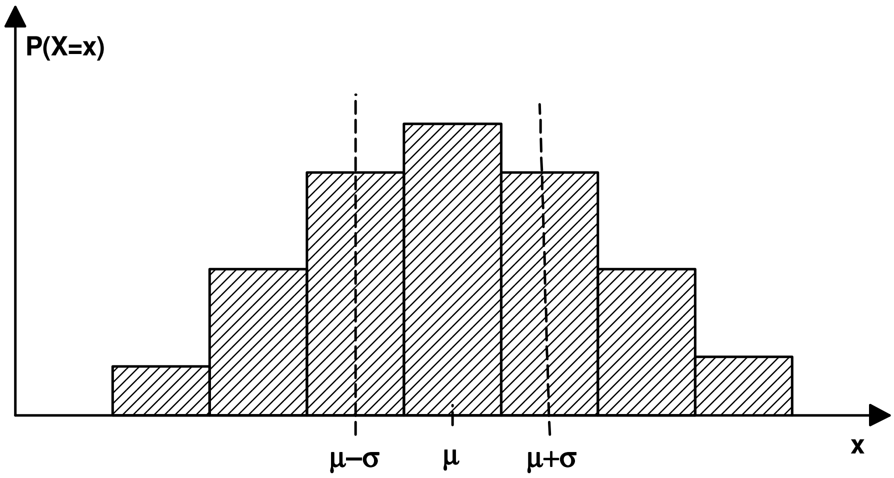
$$\mathbf{P(\left|X-\mu\right| > \varepsilon) < \frac{Var(X)}{\varepsilon^2} \Leftrightarrow P(\left|X-\mu\right| \le \varepsilon) > 1 - \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}}$$

$$\mathbf{P(\left|X-\mu\right| \ge \varepsilon) \le \frac{Var(X)}{\varepsilon^2} \Leftrightarrow P(\left|X-\mu\right| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}}$$

Beweis :

$$\sigma^2 \ge \sum_{|x_\nu-\mu| > \varepsilon} (x_\nu-\mu)^2 \cdot P(X = x_\nu) > \varepsilon^2 \cdot \sum_{|x_\nu-\mu| > \varepsilon} P(X = x_\nu) = \varepsilon^2 \cdot P(\left|X-\mu\right|) > \varepsilon$$

Analog beweist man die anderen Ungleichungen.



Für $\varepsilon = k\cdot\sigma$ erhält man $\mathbf{P(|X - \mu| \le k \cdot \sigma) > 1 - \frac{\sigma^2}{(k\cdot\sigma)^2} = 1 - \frac{1}{k^2}}$

Das ergibt speziell

k	1	2	3	4
$P(\lvert X - \mu \rvert) \leq k \cdot \sigma)$	0 %	75 %	88,89 %	93,75 %

Beispiel :

Experiment : Werfen zweier L-Teraederwürfel

Zufallsgröße X : Augensumme

Schätzen Sie mit Hilfe der Ungleichung von Tschebbyscheff ab, wie groß die Wahrschein-lich-eit ist, dass der Wert der Zufallsgröße um mehr als $\varepsilon = 2$ vom Erwartungswert abbeicht und vergleichen Sie mit der genauen Wahrscheinlichkeit.

Lösung :

$$P(\lvert X - 5 \rvert > 2) < \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2} = \frac{2{,}5}{2^2} = 62{,}5\%$$

Genaue Wahrscheinlichkeit : $P(\lvert X - \rvert > 2) = 2 \cdot (\frac{1}{16} + \frac{2}{16}) = 37{,}5\%$

Die Ungleichung von Tschebbyscheff ist eine sehr grobe Abschätzung.

Anwendung : Der Mittelwert

Bei der praktischen Bestimmung des Mittelwerte E(X) einer Zufallsgröße X führt man das zugehörige Zufallsexperiment n-mal aus. Der Mittelwert der Werte, die die Zufallsgröße bei jedem Versuch liefert dann einen Schätzwert für den Erwartungswert. Die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Schätzwert in einem bestimmten Intervall um E(X) zentriertem Intervall liegt, ist umso größer je größer n ist.

Sei X die betrachtete Zufallsgröße

Sei X_i, $1 \le i \le n$, der Wert der Zufallsgröße X beim i.ten Versuch zu.

Die Zufallsgrößen X_i , $1 \le i \le n$, besitzen dann die gleichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen d.h.t

$$E(X_i) = E(X) \quad Var(X_i) = Var(X) \quad 1 \le i \le n$$

und sind voneinander unabhängig.

Der Mittelwert $\overline{X}$ ist gegeben durch $\overline{X} = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$.

Das bedeutet aber

$$E(\overline{X}) = E\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\Big[E(X_1) + \ldots + E(X_n)\Big] = \frac{1}{n} \cdot n \cdot E(X) = E(X)$$

und

$$Var(\overline{X}) = Var\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\Big[Var(X_1) + \ldots + Var(X_n)\Big] = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot Var(X) = \frac{Var(X)}{n}$$

Beispiel :

Ein Laplace-Würfel wird 20 bzw. 100mal geworfen. $\overline{X}$ sei der Mittelwert der gewürfelten Augenzahlen.

a) Geben Sie jeweils$E(\overline{X})$ und $Var(\overline{X})$ an.
Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass $\overline{X}$ um höchstens 0,5 vom Erwartungswert abweicht mit Hilfe der der Ungleichung von Tschebbyscheff nach unten ab.

b) Geben Sie jeweils ein möglichst kleines Intervall symmetrisch zum Erwartungwert an, in dem mit mindestens 9%iger Wahrscheinlichkeit die Werte von $\overline{X}$ liegen.

c) Wie oft muss man mindestens würfeln, damit mit mindestens 99%iger Wahrscheinlichkeit der Wert von $\overline{X}$ um weniger als 0,1 vom Erwartungswert abweicht ? Verwenden Sie die Ungleichung von Tschebbyscheff

Lösung :

a) $n = 20 : E(\overline{X}) = 3{,}5 \text{ und } Var(\overline{X}) = \dfrac{\frac{35}{12}}{20} = \dfrac{7}{48}$

$$\mathbf{P}(\left|\overline{X} - 3{,}5\right| \le 0{,}5) > 1 - \frac{\frac{7}{48}}{0{,}5^2} = \frac{5}{12} \approx 41{,}6\%$$

$n = 100 : E(\overline{X}) = 3{,}5 \text{ und } Var(\overline{X}) = \dfrac{\frac{35}{12}}{100} = \dfrac{7}{240}$

$$\mathbf{P}(\left|\overline{X} - 3{,}5\right| \le 0{,}5) > 1 - \frac{\frac{7}{240}}{0{,}5^2} = \frac{53}{60} \approx 88{,}3\%$$

b) $n = 20 : \mathbf{P}(\left|\overline{X} - 3{,}5\right| \le \varepsilon) > 1 - \dfrac{\frac{7}{48}}{\varepsilon^2} \ge 0{,}9 \Leftrightarrow \varepsilon \ge 1{,}21$

$$\text{Intervall} : I = \left[2{,}29; 4{,}71\right]$$

$n = 100 : \mathbf{P}(\left|\overline{X} - 3{,}5\right| \le \varepsilon) > 1 - \dfrac{\frac{7}{240}}{\varepsilon^2} \ge 0{,}9 \Leftrightarrow \varepsilon \ge 0{,}541$

$$\text{Intervall} : I = \left[2{,}950; 4{,}041\right]$$

c) $\mathbf{P}(\left|\overline{X} - 3{,}5\right| \le 0{,}1) > 1 - \dfrac{\frac{35}{12n}}{0{,}1^2} \ge 0{,}99 \Leftrightarrow n \ge 29167$
