VIII. Bedingte Wahrscheinlichkeit

===

7.1 Definition

Eine Umfrage unter 300 Frauen und 700 Männern ergibt

	A : Frau	$\bar{A}$: Mann	
B . Raucher	100	300	400
$\bar{B}$ **: Nichtraucher**	200	400	600
	300	700	1000

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebig herausgegriffene Person, eine Frau ist, ist dann

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{300}{1000} = \frac{3}{10} = 0{,}3 = 30\%$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebig herausgegriffene Person, raucht, ist dann

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{400}{1000} = \frac{4}{10} = 0{,}4 = 40\%$$

Also gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass eine der 1000 befragten Personen eine Frau ist, die raucht,

$$P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{100}{1000} = \frac{1}{10} = 0{,}1 = 10\%$$

Davon ist zu unterscheiden ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau Raucherin ist.

Hier wird bereits vorausgesetzt, dass die befragte Person weiblichen Geschlechts ist d. h. das Ereignis A tritt an die Stelle des Ergebnisraumes Ω und die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau raucht ist die Wahrscheinlichkeit von $B \cap A$ in diesem reduzierten Ergebnisraum.

Schreibt man für diese Wahrscheinlichkeit $P(B|A)$, dann gilt

$$P(B|A) = \frac{|A \cap B|}{|A|} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|A|}{|\Omega|}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}1}{0{,}3} = \frac{1}{3} = 33\frac{1}{3}\%$$

Definition :

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $A, B \in \mathfrak{A}$ und $P(A) > 0$. Dann heißt

$$\boxed{\mathbf{P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}}$$

die **bedingte Wahrscheinlichkeit** von B unter der Voraussetzung A.

Veranschaulichung :

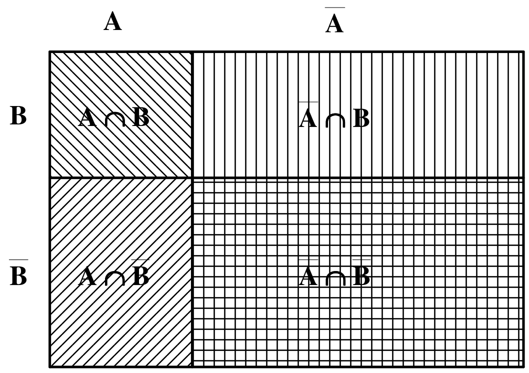
a) Vierfeldertafel

	A : Frau	**$\bar{A}$: Mann**	
B . Raucher	0,1	0,3	0,4
$\bar{B}$: Nichtraucher	0,2	0,4	0,6
	0,3	0,7	1

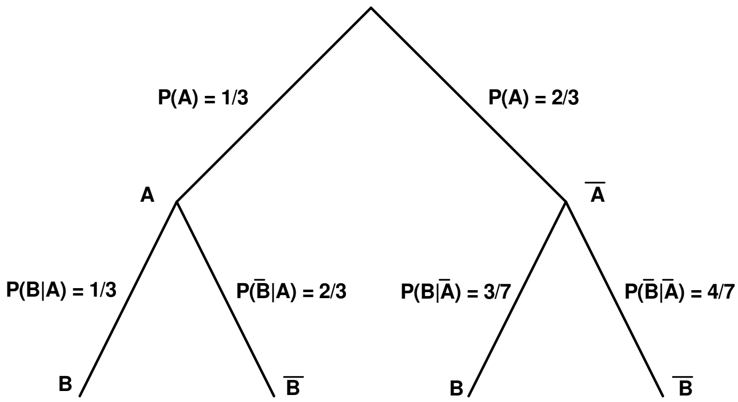
$$P(B \mid A) = \frac{0{,}1}{0{,}3} = \frac{1}{3} \text{ und } P(\bar{B} \mid A) = \frac{0{,}2}{0{,}3} = \frac{2}{3}$$

$$P(B \mid \bar{A}) = \frac{0{,}3}{0{,}7} = \frac{3}{7} \text{ und } P(\bar{B} \mid \bar{A}) = \frac{0{,}4}{0{,}7} = \frac{4}{7}$$

b) Mengendiagramm



c) Baumdiagramm



7.2 Folgerungen

Aus der Definition ergibt sich

1. Pfadregel

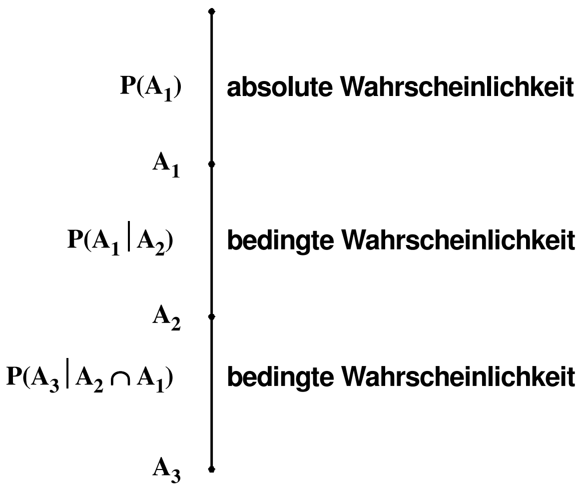
$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)}$$

oder allgemeiner

Satz :

Sind $A_1, \ldots, A_n$ Ereignisse aus dem Ereignisraum $\mathfrak{A}$ und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{A}$ sowie $P(A_{n-1} \cap \ldots \cap A_1) \neq 0$, dann ist

$$\boxed{P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_2 \cap A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n \mid A_{n-1} \cap \ldots \cap A_1)}$$



2. Pfadregel oder Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit :

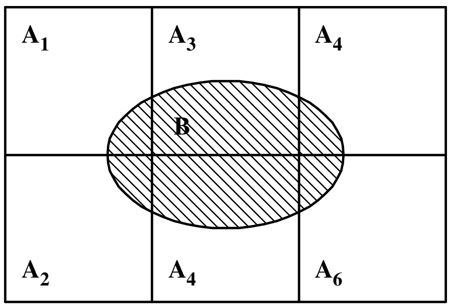
$$\boxed{\mathbf{P(B) = P(A) \cdot P(B \mid A) \; + \; P(\overline{A}) \cdot P(B \mid \overline{A})}}$$

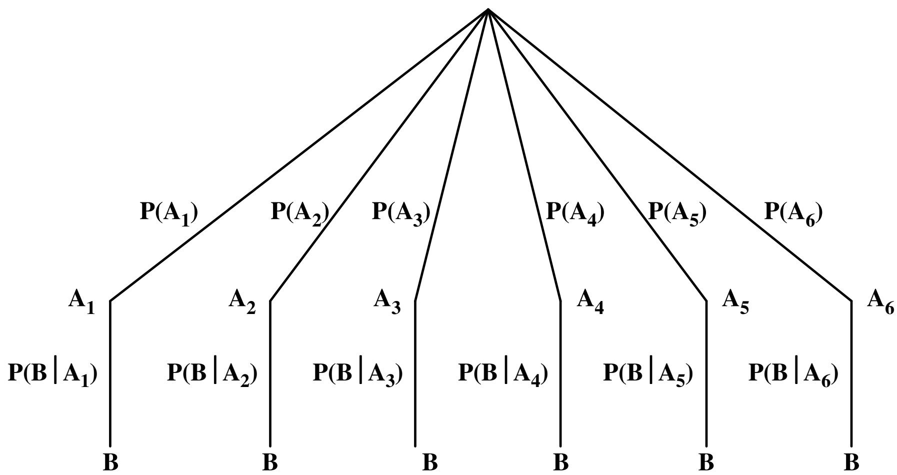
oder allgemeiner

Satz :

Bilden die Ereignisse A_1, .:. , A_n aus einem Ereignisraum $\mathfrak{A}$, mit Wahrscheinlichkeitsmaß P eine Zerlegung des zugehörigen Ergebnisraums Ω mit $P(A_i) \neq 0$, $\forall$ i , $1 \leq i \leq n$.. Dann gilt für Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $B \in \mathfrak{A}$

$$\boxed{\mathbf{P(B) \; = \; P(A_1) \cdot P(B \mid A_1) \; + \; ... \; + P(A_n) \cdot P(B \mid A_n) \; = \; \sum_{i=1}^{i=n} P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)}}$$





7.3 Die Formel von Bayes

	A : Frau	**$\overline{A}$: Mann**	
B . Raucher	0,1	0,3	0,4
$\overline{B}$: Nichtraucher	0,2	0,4	0,6
	0,3	0,7	1

A : Die befragte Person ist eine Frau. $P(A) = \frac{3}{10}$

B : Die befragte Person raucht. $P(B) = \frac{4}{10}$

$A \cap B$: Die befragte Person ist eine Frau und sie raucht. $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$

Dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass eine befragte Frau raucht. $P(B \mid A) = \frac{1}{3}$

Die Wahrscheinlichkeit $P(A \mid B)$, dass eine Person die raucht, eine Frau ist, lässt sich daraus berechnen. Es ist

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{10} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{4}{10}} = \frac{1}{4}$$

Satz :

Ist $P(A \mid B)$ die bedingte Wahrscheinlichkeit von B unter der Vorausetzung A, dann gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass A vorliegt, wenn B eintritt

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(B \mid \overline{A})}}$$ **Formel von BAYES**

Ist allgemeiner $A_1, A_2, ..., A_n$ eine Zerlegung von Ω, dann gilt

$$\boxed{\mathbf{P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} A_k \cdot P(B \mid A_k)}}}$$