## VII. Urnenexperimente

==============================================================

Beispiel :

In einer Urne sind 7 rote und 9 schwarze Kugeln.

Es werden 5 Kugeln

a) **gleichzeitig** (Ereignis A)

b) **hintereinander ohne Zurücklegen** (Ereignis B)

c) **hintereinander mit Zurücklegen** (Ereignis C) entnommen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass 2 rote und 3 schwarze Kugeln gezogen werden ?

**Lösung :**

Zur Berechnung der Ziehungswahrscheinlichkeiten müssen die n Kugeln unterschieden werden.

---

a) Es wird eine Auswahl von 5 Kugeln aus $7 + 9 = 16$ Kugeln getroffen.

1. $\left|\Omega\right| = \binom{15}{5} = \frac{15!}{5! \cdot 10!} = 3003$

2. Ein Ergebnis gehört zum Ereignis A, wenn 2 rote und 3 schwarze Kugeln gezogen werden

$$\left|A\right| = \binom{7}{2} \cdot \binom{9}{3} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} \cdot \frac{9!}{3! \cdot 6!} = 21 \cdot 84 = 1764$$

3. $P(A) = \frac{\left|A\right|}{\left|\Omega\right|} = \frac{1764}{3003} \approx 58{,}7\%$

---

b) Es handelt sich um eine Auswahl aus einer $7 + 9 = 16$-elementigen Menge nacheinander ohne Wiederholung.

1. $\left|\Omega\right| = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 = \frac{15!}{10!} = 360360$

2. Ein Ergebnis gehört zum Ereignis B, wenn 2 rote und 3 schwarze Kugeln gezogen werden

$$\left|B\right| = \frac{5!}{2!\cdot 3!} 7\cdot 6\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = \binom{5}{2}\cdot\frac{7!}{5!}\cdot\frac{9!}{6!} = 210680$$

Erklärung :

$\frac{5!}{2!\cdot 3!}$ : Anzahl der verschiedenen Zugfolgen aus zwei roten und drei schwarzen Kugeln

$7\cdot 6\cdot 9\cdot 8\cdot 7$ : Anzahl der Realisierungsmöglichkeiten einer Zugfolge

3. $P(B) = \frac{\left|B\right|}{\left|\Omega\right|} = \frac{211680}{360360} \approx 58{,}74\%$

---

c) Es handelt sich um eine Auswahl aus einer $7 + 9 = 16$-elementigen Menge nacheinander mit Wiederholung.

1. $\left|\Omega\right| = 15^5 = 759375$

2. Ein Ergebnis gehört zum Ereignis B, wenn 2 rote und 3 schwarze Kugeln gezogen werden

$$\left|C\right| = \frac{5!}{2!\cdot 3!} 7^2\cdot 9^3 = \binom{5}{2}\cdot 7^2\cdot 9^3 = 357210$$

Erklärung :

$\frac{5!}{2!\cdot 3!}$ : Anzahl der verschiedenen Zugfolgen aus zwei roten und drei schwarzen Kugeln

$7^3\cdot 9^3$ : Anzahl der Realisierungsmöglichkeiten einer Zugfolge

3. $P(C) = \frac{\left|C\right|}{\left|\Omega\right|} = \binom{5}{2}\cdot\frac{7^2\cdot 9^3}{15^5} = \binom{5}{2}\cdot\left(\frac{7}{15}\right)^2\cdot\left(\frac{9}{15}\right)^3 = 47{,}04\%$

Interpretation :

$\frac{7}{15}$ ist der Anteil roter Kugeln, $\frac{9}{15} = 1 - \frac{6}{15}$ der Anteil schwarzer Kugeln in der Urne.

**Satz** :

Befinden sich in einer Urne $n_i$ Kugeln der Sorte i, $1 \leq i \leq m$, dann ist die Wahrscheinlichkeit beim gleichzeitigen Ziehen von k Kugeln

$k_1$ Kugeln der Sorte 1,

$k_2$, Kugeln der Sorte 2 usw.

gegeben durch

$$\mathbf{P(k_1, ..., k_m; n_1, ...,n_m} = \frac{\binom{n_1}{k_1} \cdot \binom{n_2}{k_2} \cdot .... \cdot \binom{n_m}{k_m}}{\binom{n}{k}}$$

Dabei ist $n = n_1 + ... + n_m$ die Gesamtzahl der Kugeln in der Urne und $k = k_1 + .... + k_2$ die Zahl der insgesamt gezogenen Kugeln

Es muss$0 \leq k_i \leq n_i$ für $i = 1, ...., m$ sein.

**Satz :**

Sind in einer Urne mit n Kugeln $n_1$ Kugeln einer bestimmten Sorte enthalten , dann ist die Wahrscheinlichkeit beim Hintereinanderziehen von k Kugeln mit Zurücklegen $k_1$ Kugeln dieser Sorte zu ziehen gleich

$$\mathbf{P(k_1; k; p)} = \binom{k}{k_1} \left(\frac{n_1}{n}\right)^{k_1} \cdot \left(\frac{n - n_1}{n}\right)^{k - k_1}$$

$p = \frac{n_1}{n}$ ist der Anteil dieser Kugeln an allen Kugeln

und

$q = \frac{n - n_1}{n} = 1 - \frac{n_1}{n} = 1 - p$ ist der Anteil der restlichen Kugeln an allen Kugeln.

Also

$$\boxed{\mathbf{P(k_1;\, k;\, p) = \binom{k}{k_1} p^{k_1} \cdot q^{k - k_1}}}$$