V. Laplace-Experimente

==

5.1 Definition und Folgerungen

Definition :

Ein Zufallsexperiment mit dem Ergebnisraum $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\ldots, \omega_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, heißt

Laplace-Experiment,wenn alle **einelementigen Ereignisse** $\{\omega_i\}$, $1 \le i \le m$, **gleich wahrscheinlich** sind, d.h.

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \ldots. = P(\{\omega_m\}) = p$$

p heißt **Elementarwahrscheinlichkeit**.

Es gilt dann

$$\boxed{p = \frac{1}{m} = \frac{1}{|\Omega|}}$$

Für ein Ereignis $A = \{\omega_{\mu_1}, \ldots\ldots, \omega_{\mu_k}\}$ gilt dann

$$P(A) = P(\{\omega_{\mu_1}\}) + \ldots. + P(\{\omega_{\mu_k}\}) = k \cdot \frac{1}{m} = \frac{k}{m} \quad \text{also}$$

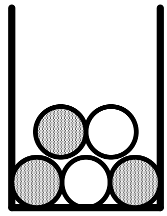
also

$$\boxed{P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}}$$

$$\boxed{\textbf{Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A} = \frac{\textbf{Anzahl der in A liegenden Ergebnisse}}{\textbf{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}}$$

5.2 Rückführung von Nicht-Laplace-Experimenten auf Laplace-Experimente

---



Eine Urne enthält 3 rote und 2 schwarze, gleichartige Kugeln.

Es werden 2 Kugeln herausgegriffen und zwar

a) **gleichzeitig**

b) **nacheinander mit Zurücklegen**

c) **nacheinander ohne Zurücklegen**

Ereignis A : Es werden eine rote und eine schwarze Kugel gezogen.

Ereignis B : Es werden zwei rote Kugeln gezogen

---

a) 1. $\Omega° = \left\{ rr,\ rs,\ ss \right\}$ ist kein Laplace-Ergebnisraum.

Rückführung auf ein Laplace-Experiment durch Unterscheidung der Kugeln :

$$\Omega = \left\{ \{r_1, r_2\}, \{r_1, r_3\}, \{r_1, s_1\}, \{r_1, s_2\}, \{r_2, r_3\}, \{r_2, s_1\}, \{r_2, s_2\}, \{r_3, s_1\}, \{r_3, s_2\}, \{s_1, s_2\} \right\}$$

ist ein Laplace-Ergebnisraum mit $\left|\Omega\right| = 10.$

2. $\left|A\right| = 6$ und $\left|B\right| = 3$

3. $P(A) = \dfrac{\left|A\right|}{\left|\Omega\right|} = \dfrac{6}{10} = 60\ \%$ und $P(\&) = \dfrac{\left|b\right|}{\left|\Omega\right|} = \dfrac{3}{10} = 30\ \%$

---

b) 1. $\Omega° = \left\{ rr,\ rs,\ sr,\ ss \right\}$ $\quad \Omega = \left\{ r_1, r_2, r_3, s_1, s_2 \right\}^2 \quad \Rightarrow \quad \left|\Omega\right| = 5^2 = 25$

2. $\left|A\right| = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 12$ und $\left|A\right| = 3 \cdot 3 = 9$

3. $P(A) = \dfrac{\left|A\right|}{\left|\Omega\right|} = \dfrac{12}{25} = 48\ \%$ und $P(B) = \dfrac{\left|B\right|}{\left|\Omega\right|} = \dfrac{9}{25} = 36\ \%$

---

c) 1. $\Omega° = \left\{ rr, rs, sr, ss \right\}$

$$\Omega = \Omega = \left\{ r_1, r_2, r_3, s_1, s_2 \right\}^2 \setminus \left\{ r_1r_1, r_2r_2, r_3r_3, s_1s_1, s_2s_2 \right\} \Rightarrow \quad \left| \Omega \right| = 5^2 - 5 = 20$$

2. $\left| A \right| = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3$ und $\left| B \right| = 3 \cdot 2 = 6$

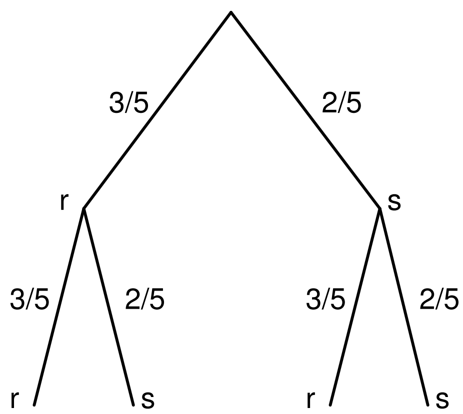
3. $P(A) = \dfrac{\left| A \right|}{\left| \Omega \right|} = \dfrac{12}{20} = 60\ \%$ und $P(B) = \dfrac{\left| b \right|}{\left| \Omega \right|} = \dfrac{6}{20} = 30\ \%$

Bemerkungen :

a) Das Ziehen aus einer Urne nacheinander ohne Zurücklegen ist gleichwertig mit dem gleichzeitigen Ziehen aus der Urne.

b) Einfacher lassen sich die Wahrscheinlichkeiten für das Ziehen hintereinander mit Hilfe von Baumdiagrammen berechnen. Dazu schreibt man an jeden Zweig die Wahrscheinlichkeit, dass er durchlaufen wird.

Für das Beispiel b) ergibt sich

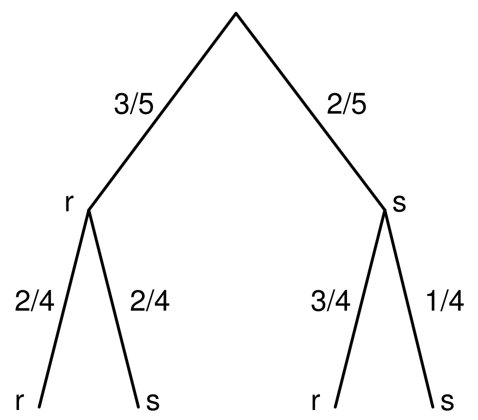


Da es sich um ein Ziehen mit Zurücklegen handelt, ist die Wahrscheinlichkeit, eine rote bzw. schwarze zu ziehen stets gleich. Wie man leicht einsieht, gilt dann

$$P(A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{25} = 48\%$$

da das Ereignis A durch zwei Pfade realisiert werden kann.

Für das Beispiel c) ergibt sich



Da sich durch das Nichtzurücklegen die Versuchsbedingungen ändern, ändern sich die Wahrscheinlichkeiten für das Durchlaufen der einzelnen Zweige. Es gilt dann

$$P(A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{12}{20} = 60\%$$

Allgemein nennt man die Wahrscheinlichkeiten für das Durchlaufen der Zweige im 2., 3., 4. usw. Teilversuch **bedingte Wahrscheinlichkeiten**, da ihr Wert vom Ergebnis der vorhergehenden Teilversuche abhängt.

Allgemein gilt :

1. Pfadregel

Die Wahrscheinlichkeit für das Durchlaufen eines Pfades ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten für das Durchlaufen der Zweige, die den Pfad bilden.

2. Pfadregel

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten für das Durchlaufen der Pfade, die das Ereignis realisieren.