III. Relative Häufigkeit

===

3.1 Definition und Gesetz der großen Zahlen

Wenn man sagt, die Wahrscheinlichkeit mit einem Würfel eine Sechs zu werfen sei 1 : 6, dann meint man, dass bei einer sehr großen Zahl von Würfen meist etwa ein Sechstel aller Würfe eine Sechs ist.

Man bezeichnet den Anteil der Sechsen an der Gesamtzahl aller Würfe als relative Häufigkeit des Ereignisses

A : Augenzahl 6

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses kann jedoch durch Ermittlung seiner relativen Häufigkeit nicht ermittelt werden, da diese selbst vom Zufall abhängt.

Trotzdem ist es sinnvoll, in die Definition der Wahrscheinlichkeit von Ereignissen Eigenschaften der relativen Häufigkeit aufzunehmen.

Definition :

Ist A ein Ereignis aus einer Ereignisalgebra $\mathfrak{A}$ und tritt bei der n-maligen Ausführung des zugehörigen Zufallsexperiments das Ereignis A genau z-mal ($0 \le z \le n$) ein, so heißt z die **absolute Häufigkeit** des Auftretens von A und

$$\boxed{h_n(A) = \frac{z}{n}}$$

die **relative Häufigkeit** des Auftretens von A.

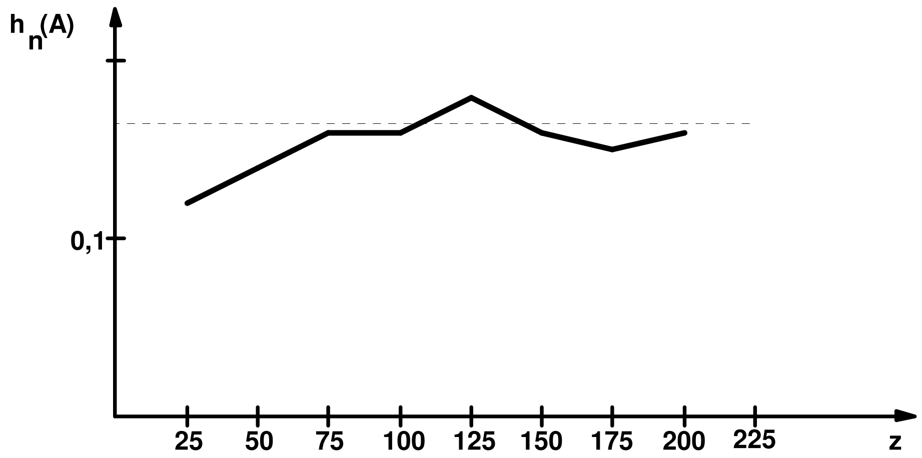
Beispiel :

Experiment :

Wir würfeln und untersuchen das Verhalten der relativen Häufigkeit der Eins in Abhängigkeit von der Versuchsanzahl n.

z	3	7	12	16	22	24	26	32
n	25	5	75	100	125	150	175	200
$h_n(\{1\})$	0,12	0,14	0,16	0,16	0,18	0,16	0,15	0,16

Diagramm :



Ergebnis :

Die relative Häufigkeit des Ereignisses A stabilisiert sich in einem bestimmten Bereich.
Diese Stabilisierung ist jedoch kein mathematischer Grenzwertprozeß.

3.2 Eigenschaften der relativen Häufigkeit

Satz :

Für die relative Häufigkeit der Ereignisse A und B bei der n-maligen Ausführung eines Zufallsexperiments gilt

H 1 : $\mathbf{0 \leq h_n(A) \leq 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}}$

H 2 : $\mathbf{h_n(\Omega) = 1}$

H 3 : $\mathbf{h_n(\varnothing) = 0}$

H 4 : $\mathbf{A \cap B = \varnothing \Rightarrow h_n(A \cap B) = h_n(A) + h_n(B)}$

oder allgemeiner

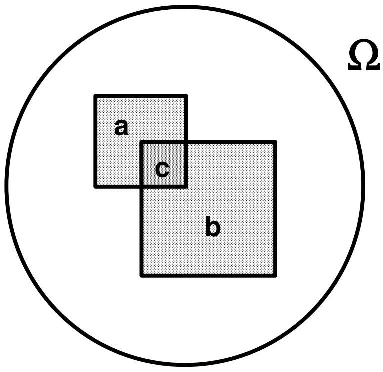
H 5 : $\mathbf{h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B) - h_n(A \cap B)}$

Begründung:

Sind a, b und c die absoluten Häufigkeiten des Auftretens von A, B und $A \cap B$,.dann

$$h_n(A \cup B) = \frac{a+b-c}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{c}{n} =$$

$$= h_n(A) + h_n(B) - h_n(A \cap B)$$



Beispiel :

Nachstehend ist eine Tabelle der absoluten Häufigkeiten beim n-maligen Werfens eines idealen Würfels gegeben.

Versuchsanzahl	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
100	20	17	20	7	20	16
1000	170	175	169	166	165	155
5000	828	850	796	820	872	834
10000	1679	1728	1612	1604	1704	1673
25000	4050	4196	4198	4167	4106	4283
100000	16549	16750	16490	16851	16611	16749

Beantworten Sie mit Hilfe der Tabelle folgende Fragen :

a) Wie groß ist die rel. Häufigkeit nach 1000 Versuchen von $A \cup B$ für

i) A : Eine gerade Zahl wird gewürfelt. B: Die gewürfelte Zahl ist Teiler von 5.

ii) A : Eine gerade Zahl wird gewürfelt. B : Die gewürfelte Zahl ist kleiner als 4.

b) Wie groß ist $h_n(A)$ für $n = 25000$ und $A = \{2, 4, 6\}$?

c) Berechnen Sie $h_n(A)$ und $h_n(B)$ für $n = 5000$ wobei

A : Eine gerade Zahl wird gewürfelt. $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

d) Wie groß ist $\sum_{i=1}^{6} h_n(\{i\})$ für $n = 100000$?