II. Ereignisräume

==

2.1 Definition und Veranschaulichung

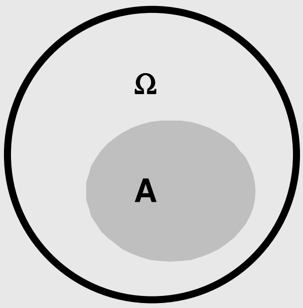
Experiment : Würfeln

Ergebnisraum : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Ereignis "Gerade Augenzahl" : $A = \{2, 4, 6\}$

Definition :

Eine **Teilmenge** A des Ereignisraumes Ω eines Zufallsexperiments heißt **Ereignis**.



Das Ereignis A tritt dann ein, wenn das Versuchsergebnis ω in A liegt; $\omega \in A$, es tritt nicht ein, wenn $\omega \notin A$.

$\varnothing \subseteq \Omega$ bzw. heißt **unmögliches Ereignis** ($\varnothing = \{\ \}$ ist die leere Menge)

$\{\omega\}$ mit $\omega \in \Omega$ ist ein **einelementiges Ereignis** oder **Elementarereignis**

$\Omega \subseteq \Omega$ heißt **sicheres Ereignis**

Die Menge aller Ereignisse von Ω ist die Menge aller Teilmengen von Ω, die **Potenzmenge Pot(Ω)** von Ω.

Es gilt :

$$\boxed{|\Omega| = n \Rightarrow |\mathrm{Pot}(\Omega)| = 2^n}$$

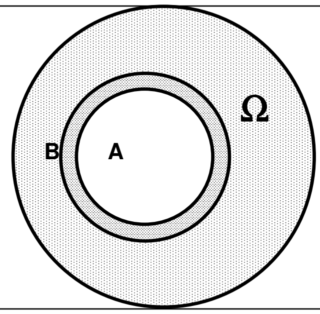
d.h. eine n-elementige Menge hat 2^n verschiedene Teilmengen.

2.2 Die Verknüpfung von Ereignissen

Aus Ereignissen lassen sich neue Ereignisse konstruieren. Dies geschieht in der beschreibenden Form von Ereignissen mit den logischen Verknüpfungen "**und**", "**oder**", "**nicht**".
Diesen logischen Verknüpfungen entsprechen in der Mengendarstellung der Ereignisse die Mengenoperatoren.

Zwei Ereignisse sind gleich, wenn A genau dann eintritt, wenn B eintritt.

$$\boxed{\mathbf{A = B}}$$



Beispiel :

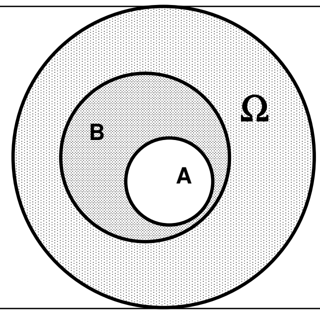
Experiment : Einmaliges Würfeln (auch für die folgenden Beispiele)

A : Die gewürfelte Zahl ist größer als 5.

B : Eine 6 wird gewürfelt.

Das Ereignis A zieht das Ereignis B nach sich, wenn das Eintreten von A auch das Eintreten von B bedeutet.

$$\boxed{\mathbf{A \subseteq B}}$$



Beispiel :

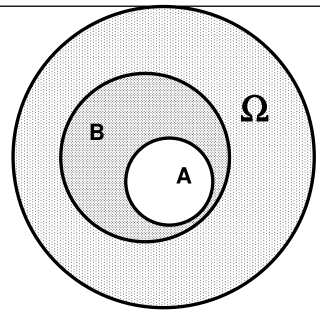
A : Eine 2 wird gewürfelt.

B : Die gewürfelte Augenzahl ist gerade.

Komplementbildung :

$\overline{\mathbf{A}}$: Ereignis A tritt **nicht** auf.

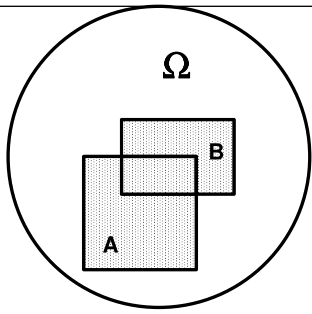
$$\overline{\mathbf{A}} = \left\{ \omega \in \Omega \;\middle|\; \omega \notin A \right\}$$



Vereinigung :

$A \cup B$: Ereignis A **oder** Ereignis B tritt auf.

$$A \cup B = \left\{ \omega \in \Omega \;\middle|\; \omega \in A \vee \omega \in A \right\}$$



Beispiel :

A : Die gewürfelte Augenzahl ist gerade.

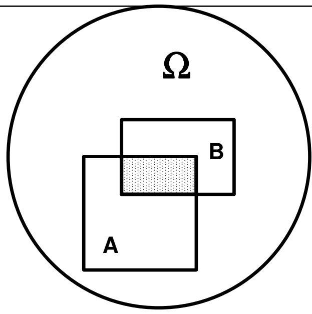
B : Die gewürfelte Augenzahl ist größer als 2.

$A \cup B$: Es wird keine 1 gewürfelt.

Schnitt :

$A \cap B$: Ereignis A **und** Ereignis B tritt auf.

$$A \cap B = \left\{ \omega \in \Omega \;\middle|\; \omega \in A \wedge \omega \in A \right\}$$



A : Die gewürfelte Augenzahl ist größer als 2.

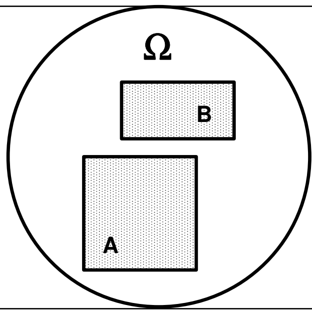
B : Die gewürfelte Augenzahl ist kleiner als 4.

$A \cap B$: Es wird eine Drei gewürfel.

SONDERFALL : **Unvereinbare Ereignisse**

Zwei Ereignisse A und B heißen unvereinbar, wenn

$$A \cap B = \varnothing$$



Beispiel :

A : Die gewürfelte Augenzahl ist gerade.

B : Es wird eine 5 gewürfelt.

Definition :

Sind die Ereignisse A_1, A_2, .., A_n **paarweise unvereinbar** und gilt

$$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega ,$$

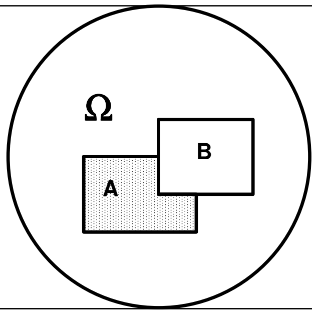
dann bilden diese Ereignisse eine **Zerlegung** von Ω.

A_1 : Die gewürfelte Augenzahl ist gerade.

A_2 : Die gewürfelte Augenzahl ist ungerade.

Das Ereignis A tritt ein, aber das Ereignis B nicht.

$$A \setminus B = \overline{B} \cap A = \left\{ \omega \in \Omega \;\middle|\; \omega \in A \wedge \omega \notin B \right\}$$



Beispiel :

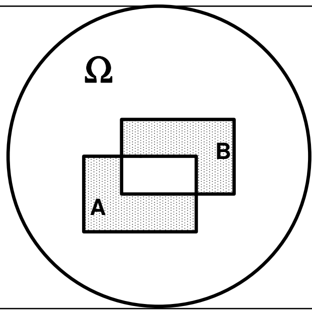
A : Die gewürfelte Augenzahl ist eine Primzahl.

B : Die gewürfelte Augenzahl ist ungerade.

$A \setminus B$: Es wird eine 2 gewürfelt.

Entweder Ereignis A oder B tritt ein :

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

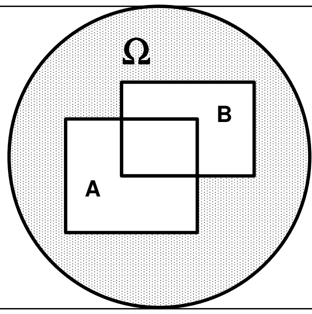


Beispiel :

A : Die gewürfelte Augenzahl ist eine Primzahl

B : Die gewürfelte Augenzahl ist gerade

$(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$: Die gewürfelte Augenzahl ist größer als 2

Weder A noch B tritt ein : $\overline{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}}$	

Beispiel :

A : Die gewürfelte Augenzahl ist eine Primzahl.

B : Die gewürfelte Augenzahl ist gerade.

$\overline{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}}$: Die gewürfelte Augenzahl ist 1.

Für die Anwendung der Mengenoperatoren gelten einige Gesetze :

$\boxed{A \cup B = B \cup A}$ $\boxed{A \cap B = B \cap A}$	**Kommutativgesetze**
$\boxed{(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)}$ $\boxed{(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)}$	**Assoziativgesetze**
$\boxed{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$ $\boxed{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$	**Distributivgesetze**
$\boxed{A \cup \varnothing = A}$ $\boxed{A \cap \Omega = A}$	**Neutrale Elemente**
$\boxed{A \cup \Omega = A}$ $\boxed{A \cap \varnothing = \varnothing}$	**Dominante Elemente**
$\boxed{A \cup \overline{A} = \Omega}$ $\boxed{A \cap \overline{A} = \varnothing}$	**Gesetze über komplementäre Elemente**
$\boxed{A \cup A = A}$ $\boxed{A \cap A = A}$	**Idempotenzgesetze**
$\boxed{\overline{\overline{A}} = A}$	**Doppeltes Komplement**
$\boxed{A \cup (A \cap B) = A}$ $\boxed{A \cap (A \cup B) = A}$	**Absorptionsgesetze**
$\boxed{\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}}$ $\boxed{\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}}$	**Gesetze von de Morgan**

Beispiel :

A : Die gewürfelte Augenzahl ist ungerade.

B : Die gewürfelte Augenzahl ist kleiner als 4.

$\overline{\overline{A} \cup B} = \overline{\overline{A}} \cap \overline{B} = A \cap \overline{B}$: Es wird eine 5 gewürfelt.

2.3 Die Ereignisalgebra

Definition :

Eine nicht-leere Menge S von Ereignissen aus dem Ereignisraum Pot(Ω) eines Ergebnisraumes Ω heißt **Ereignisalgebra $\mathfrak{A}$** oder Ereignisraum auf Ω, wenn gilt

1. $\mathbf{A \in S \quad \Rightarrow \quad \overline{A} \in S}$

2. $\mathbf{A \in S \wedge B \in S \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in S}$

3. $\mathbf{A \in S \wedge B \in S \quad \Rightarrow \quad A \cap B \in S}$

Beispiel :

Experiment : Würfeln

Ergebnisraum : $\Omega = \left\{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \right\}$

Die kleinste Ereignisalgebra $\mathfrak{A}$, die die Ereignisse $\left\{ 1 \right\}$ und $\left\{ 5, 6 \right\}$ enthält, ist

$$\mathfrak{A} = \left\{ \varnothing , \{1\} , \{5, 6\} , \{2, 3, 4, 5, 6\} , \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 5, 6\} , \{2, 3, 4\} , \Omega \right\}$$
