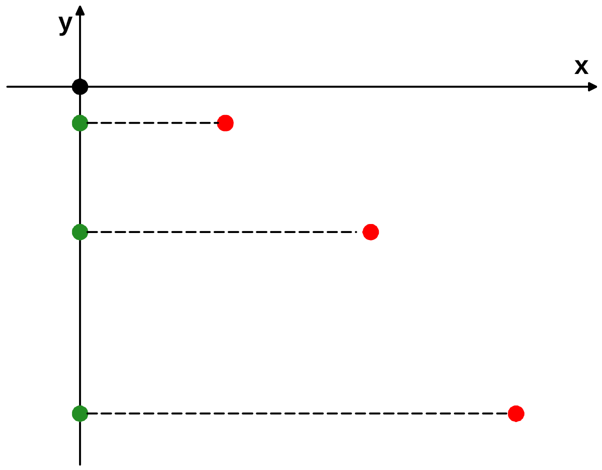
IV. Der waagrechte Wurf- ebene Bewegungen

==

5.1 Ortsbeschreibung

Wird ein Körper der Masse m zur Zeit $t = 0$ mit einer waagrecht gerichteten Geschwindigkeit vom Betrag v_0 im Schwerefeld der Erde abgeworfen, dann nennt man sich unter dem Einfluß der Schwerkraft ergebende Bewegung einen waagrechten Wurf.



Für den waagrechten Wurf gilt das **Relativitätsprinzip** :

In allen Bezugssystemen, in denen der Newtonsche **Trägheitssatz** gilt, sind die physikalischen Gesetze die gleich. Solche Bezugssysteme heißen **Inertialsysteme**.

Jedes Bezugssystem, das sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit zu einem Inertialsystem bewegt, ist selbst ein Inertialsystem.

Folgerung :

Die Koordinaten eines waagrecht abgeworfenen Körpers zur Zeit t ergeben sich zu

$\boxed{x(t) = v_0 \cdot t}$ und $\boxed{y(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2}$

Der Pfeil, der vom Ursprung des Bezugssystems, zum jeweiligen Ort des Körpers zeit, heißt **Ortsvektor** $\vec{r}(t)$.

Man schreibt

$$\boxed{\vec{r}t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cdot t \\ -\frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{pmatrix}}$$

Stellt man die y-Koordinate des Körpers als Funktion der x-Koordinate dar, dann erhält man Gleichung der **Bahnkurve**

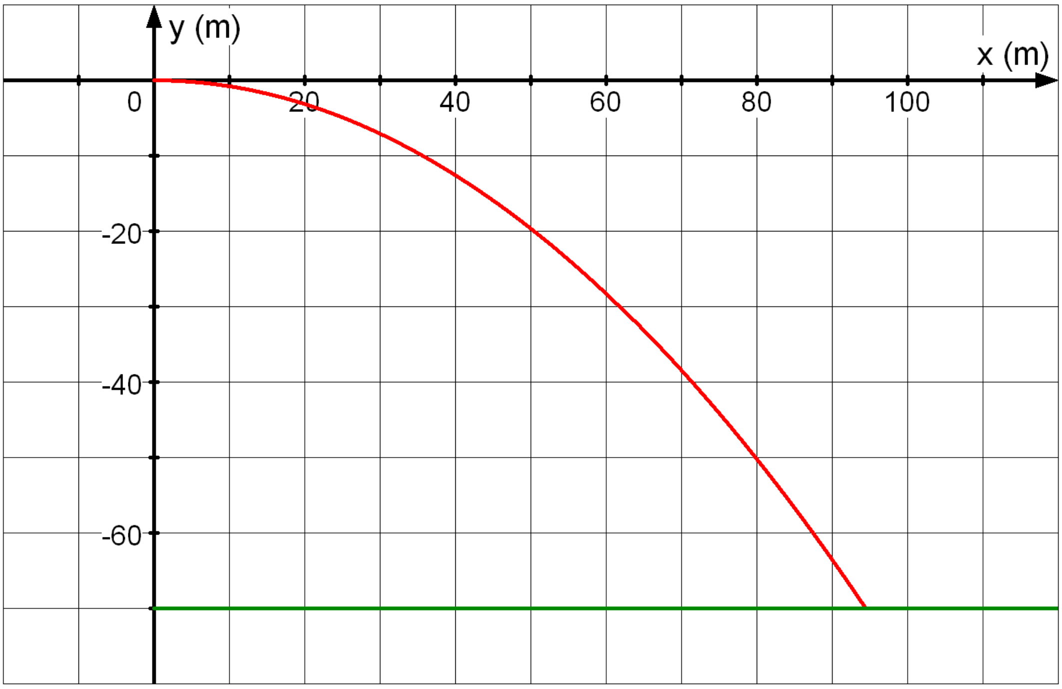
$t = \frac{x}{v_0}$ in $y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2$ eingesetzt ergibt $y = -\frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{x}{v_0} \right)^2 = -\frac{g}{2 v_0^2} \cdot x^2$

Die Bahnkurve beim waagrechten Wurf ist eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Abwurfpunkt als Scheitel.

$$\boxed{\mathbf{y = -\frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{x}{v_0} \right)^2 = -\frac{g}{2 v_0^2} \cdot x^2}}$$

Ist die durchfallene Höhe gleich H, dann gilt für die Wurfweite W

$$\boxed{\mathbf{W = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}}}}$$



5.2 Die Geschwindigkeit

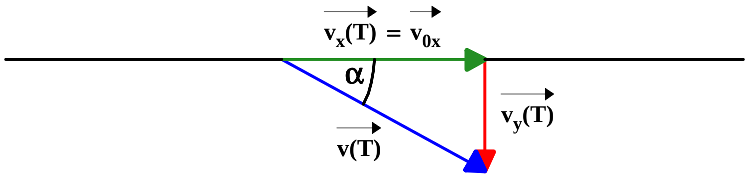
Die geometrischen Geschwindigkeiten in x und y Richtung sind die Koordinaten des Geschwindigkeitsvektors

$$\boxed{\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \\ -g \cdot t \end{pmatrix}}$$

Dies ist ein zur Bahnkurve tangential gerichteter Vektor. Sein Betrag

$$\boxed{\mathbf{v(t) = \sqrt{v_0^2 + g^2 \cdot t^2}}}$$

heißt Bahngeschwindikeit und gibt den zurückgelegten Weg pro Zeiteinheit an

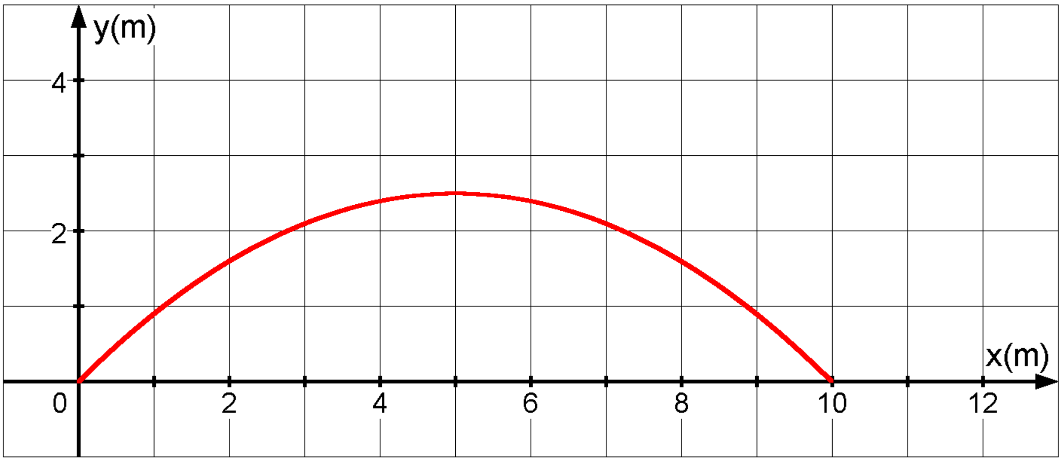


Ist T die Wurfdauer, dann ist der Auftreffwinkel α gegen die Horizontale gegeben durch

$$\boxed{\mathbf{\tan\alpha = \frac{v_0}{g \cdot T}}}$$

4.3 Der schiefe Wurf

==



Wird ein Körper unter einem Winkel α gegen die Horizontale mit der Geschwindigkeit vom Betrag v_0 im Schwerefeld der Erde abgeworfen, dann spricht man von ein einem schiefen Wurf.

x-Koordinate der Geschwindigkeit : $v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha$

y-Koordinate der Geschwindigkeit : $v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha$

Beobachter, der sich mit der Geschwindigkeit v_{0x} mitbewegt, sieht einen senkrechten Wurf nach oben.

Also gilt für die y-Koordinate des Körpers zur Zeit t

$$y(t) = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Beobachter, der diesen Wurf nach oben mitmacht, sieht eine lineare Bewegung mit der Geschwindigkeit v_{0x}.

Also gilt für die x-Koordinate des Körpers zur Zeit t

$$x(t) = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t$$

Damit ergibt sich als Ortsvektor : $\boxed{\mathbf{\vec{r}(t)} = \begin{pmatrix} \mathbf{v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t} \\ \mathbf{v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2} \end{pmatrix}}$

Gleichung der Bahnkurve :

$$x = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t \;\Rightarrow\; t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

In $y = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ eingesetzt

$$y = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cos\alpha} - \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha} \right)^2 = \tan\alpha \cdot x - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} \cdot x^2$$

Ergebnis :

Die Bahnkurve beim schiefen Wurf ist Teil einer nach unten geöffnete Parabel.

Bedingung für die **Wurfweite W** :

$$y = 0 \;\Leftrightarrow\; \tan\alpha \cdot x - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \text{ (Abwurf)} \;\vee\; x = \frac{2 v_0^2}{g} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \text{ (Wurfweite)}$$

$$\boxed{\mathbf{W = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha}}$$

Bedingung für maximale Wurfweite bei vorgegebener Abwurfgeschwindigkeit : $\alpha = 45°$

Geschwindigkeitsvektor :

$$\boxed{\overrightarrow{v(t)} = \begin{pmatrix} \mathbf{v_0 \cdot \cos\alpha} \\ \mathbf{v_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot t} \end{pmatrix}}$$

Bedingung für die halbe Wurfdauer T :

$$v_y\left(\frac{T}{2}\right) = v_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot \frac{T}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T = \frac{2 v_0 \cdot \sin\alpha}{g}$$

Also ist die **Wurfdauer T** gegeben durch

$$\boxed{\mathbf{T = \frac{2 v_0 \cdot \sin\alpha}{g}}}$$

Maximale **Wurfhöhe H** :

$$H = y\left(\frac{T}{2}\right) = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot \frac{v_0 \sin\alpha}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 = \frac{v_0{}^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

$$\boxed{\mathbf{H = \frac{v_0{}^2 \sin^2\alpha}{2g}}}$$
